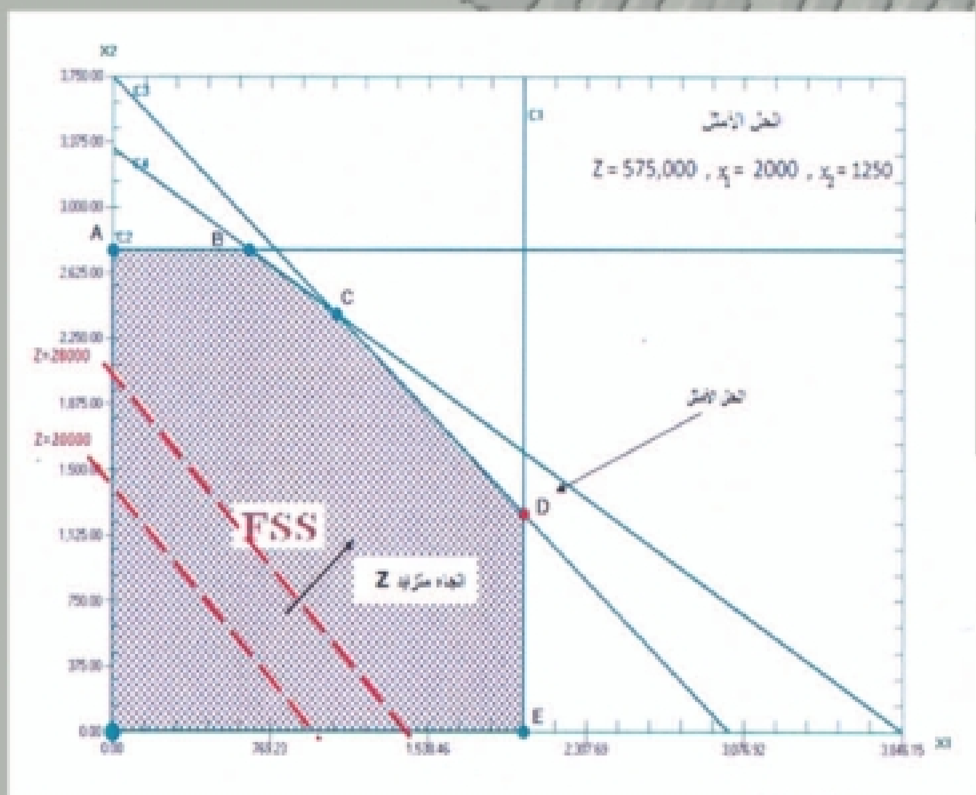
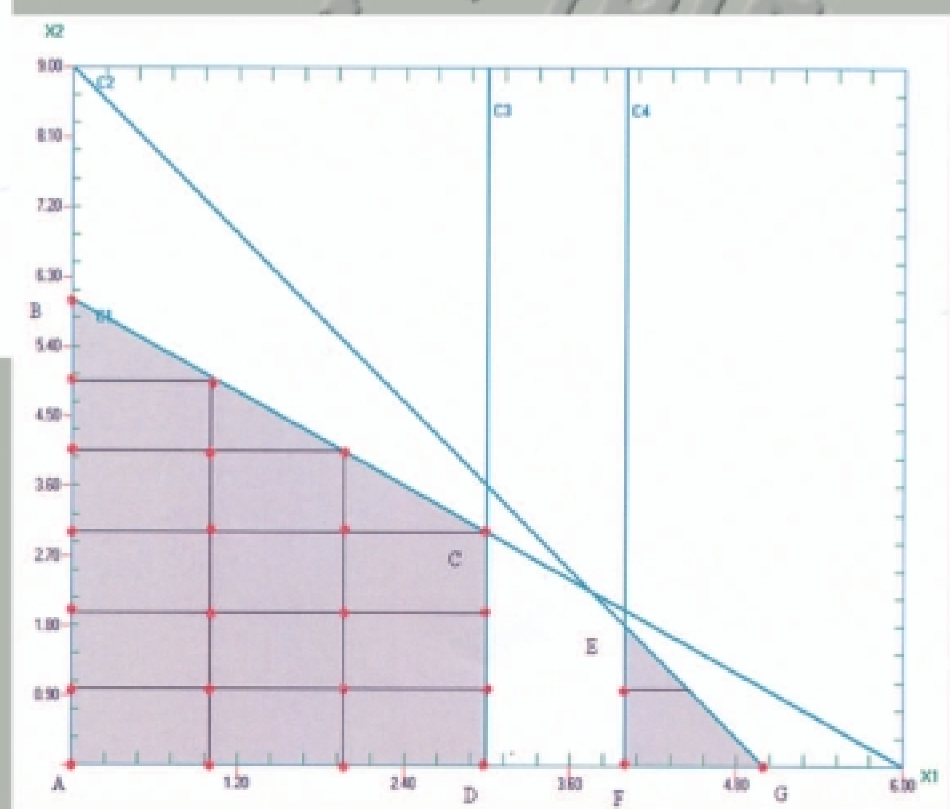
البرمجة العددية نماذج وطرق حل





تأليف

أ. د. زيد تميم البلخي   أ. د. لطفي عبد القادر تاج

جامعة الملك سعود

النشر العلمي و المطابع

الله

بسم الله الرحمن الرحيم

البرمجة العددية نماذج وطرق حل

تأليف

أ.د. زيد تميم البلخي — أ.د. لطفي عبد القادر تاج

أستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات — أستاذ بقسم الإحصاء وبحوث العمليات

كلية العلوم – جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

تم تأليف هذا الكتاب بدعم من مركز بحوث كلية العلوم برقم (Stat/2006/09/B)

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

البلخي، زيد تميم.

البرمجة العددية نماذج وطرق حل./ زيد تميم البلخي ؛ لطفي عبدالقادر تاج - الرياض، ١٤٣١هـ.

٣٧٦ ص ؛ ١٧سم × ٢٤ سم

ردمك: ٢ - ٧٤٧ - ٥٥ - ٩٩٦٠ - ٩٧٨

١- البرمجة (رياضيات) ٢- الإحصاء أ. تاج، لطفي عبدالقادر (مؤلف مشارك) ب. العنوان

ديوي ٥١٩,٧٢ ١٤٣١/١٠٠٣٢

رقم الإيداع: ١٤٣١/١٠٠٣٢

ردمك: ٢ - ٧٤٧ - ٥٥ - ٩٩٦٠ - ٩٧٨

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وقد وافق المجلس العلمي على نشره - بعد اطلاعه على تقارير المحكمين - في اجتماعه العشرين للعام الدراسي ١٤٣٠/١٤٣١هـ المعقود بتاريخ ١٤٣١/٦/٩هـ الموافق ٢٠١٠/٥/٢٣م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٣٢هـ

المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم الذي بعثه الله رحمة للعالمين ... وبعد، نضع بين يدي القارئ العربي هذا الكتاب الذي أسميناه "**البرمجة العددية – نماذج وطرق حل**" وهو من بين الكتب النادرة المتوافرة في المكتبة العربية حول هذا الموضوع. يتكون هذا الكتاب من بابين رئيسين. يحتوي الباب الأول من هذا الكتاب على أربعة فصول. يعالج الفصل الأول منها ما يعرف باسم "البرمجة الخطية" والتي تعرف اختصاراً على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي دوال خطية في متغيرات القرار. والسبب الرئيس لإدراج هذا الفصل هو أن معظم مسائل البرمجة الخطية التي نواجهها في الواقع العملي تتضمن شرطاً إضافيا واضحاً أو ضمنياً ينص على أن قيم بعض أو كل المتغيرات في هذه المسائل هي قيم (أعداد) صحيحة، والتي يطلق عليها اسم "البرمجة الخطية العددية". وفي معظم الأحيان فإنه ولحل هذا النوع من المسائل لابد لنا أولاً من إسقاط مثل هذا الشرط الإضافي وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والذي سيكون منطلقاً يسهل علينا عملية الوصول إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة العددية الأصلية.

وقد استعرضنا في الفصل الثاني بعض الأمثلة البسيطة على أنماط البرمجة العددية وبعض الطرق البسيطة لحلها. ويمثل هذا الفصل مدخلاً لابد منه إلى موضوعات البرمجة العددية التي سترد في الفصول التالية ، كما أنه قد يكون كافياً لمن يرغب في أخذ فكرة سريعة عن مسائل البرمجة العددية وكيفية تصنيفها وحلها. ونظراً لاتساع المجالات التطبيقية لمسائل البرمجة العددية فقد خصصنا لها الفصلين الثالث والرابع. فاستعرضنا النماذج البسيطة في الفصل الثالث والتي نعتقد أنها ستكون كافية لمن يرغب في دراسة مقرر قصير الأجل في الموضوع. واتبعنا في الفصل الرابع استعراض المزيد من النماذج المتقدمة للبرمجة العددية.

ويتكون الباب الثاني من ثلاثة فصول تتعرض لطرق الحل الرئيسة لنماذج البرمجة العددية. فقد احتوى الفصل الخامس على ما يسمى "طرق التفرع والحد "كأحد أهم الطرق التي تصلح لحل ومعالجة أي مسألة برمجة خطية عددية. ونظراً لأنه يمكن تحويل أي مسألة برمجة خطية عددية إلى "مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم" ، فقد استعرضنا في الفصل السادس ما يسمى "طريقة التعداد الضمني" كطريقة مناسبة لحل هذا النوع الأخير من مسائل البرمجة العددية. أما في الفصل السابع فقد قدمنا ما يطلق عليها اسم "طرق مستوى القطع" كطرق بديلة يكثر استخدامها في حل مسائل البرمجة العددية غير تلك التي تأخذ متغيراتها قيما ثنائية. وتعتمد هذه الطرق أساساً على استخدام طريقتي السمبلكس والسمبلكس الثنوية اللتان سبق تقديمهما في الفصل الأول من الكتاب.

وقد توخينا أن يكون عرض الموضوعات بأسلوب سهل وميسر وبما يتناسب مع الخلفية العلمية لطلبتنا حين دراستهم لموضوعات البرمجة الخطية العددية ومن في حكمهم ، متجنبين بنفس الوقت جميع التعقيدات الرياضية التي لا ضرورة لها. ولذا فقد كان التركيز في فصول الكتاب المختلفة على عرض ومناقشة الموضوعات وإيراد

التعاريف والنظريات والنتائج الأساسية اللازمة. وما خلا بعض الأمثلة والتمارين ذات الطابع التوضيحي فقد حرصنا قدر الإمكان أن تكون الأمثلة والتمارين الواردة في متن الكتاب وفي نهاية كل فصل من فصوله ذات طابع تطبيقي متنوع في مجالات الحياة المختلفة.

ونود التنويه إلى أنه وإضافة إلى إمكانية استخدام الكتاب في تغطية وتدريس موضوعات البرمجة الخطية العددية في المرحلة الجامعية الأولى، فإنه يهدف أيضاً إلى مساعدة كل المهتمين بهذه الموضوعات وتطبيقاتها المتنوعة في حل الكثير من مسائل الواقع العملي. وبهذه المناسبة فإن المؤلفين يودان تقديم شكرهم للمحكمين الثلاثة الذين قدموا ملاحظات واقتراحات قيمة ساهمت في تحسين الكتاب شكلا ومضمونا، كما يقدم المؤلفان شكرهم وتقديرهم للأستاذ عمر الدباسي الذي قدم مساعدة كبيرة في تحسين الرسومات الواردة في الكتاب.

ومع أننا بذلنا جهداً غير قليل لإخراج الكتاب في وضعه الحالي فقد لا يكون هذا الوضع هو الأمثل. ولذا فإننا نرجو من قراء ومستخدمي هذا الكتاب من طلبة ومدرسين وغيرهم أن يوافونا مشكورين بملاحظاتهم ومقترحاتهم التي قد تساهم في تحسين مضمون وموضوعات هذا الكتاب.

وبعد، فإننا نأمل أن نكون قد قدمنا بعملنا هذا الفائدة المرجوة للقراء العرب. كما ندعو الله أن يجعل هذا العمل في صحيفة حسناتنا يوم نلقاه والله من وراء القصد وهو ولي التوفيق،،،

المؤلفان

المحتويات

الصفحة

الباب الثاني

الباب الأول

- أساسيات البرمجة الخطية: الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس
- مدخل إلى البرمجة العددية
- النماذج البسيطة
- النماذج المتقدمة

مقدمة الباب الأول

يحتوي الباب الأول من هذا الكتاب على أربعة فصول. يحتوي الفصل الأول منها على ما يعرف بالبرمجة الخطية والتي تعرف اختصاراً على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي دوال خطية في متغيرات القرار. وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت ولا تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الواقع سنذكر العديد منها في الفصل الأول من هذا الكتاب. لكن السبب الرئيس لإدراج هذا الفصل هو أن معظم مسائل البرمجة الخطية التي نواجهها في الواقع العملي تتضمن شرطاً إضافيا واضحاً أو ضمنياً ينص على أن قيم *بعض أو كل* المتغيرات في هذه المسائل هي قيم (أعداد) صحيحة، والتي سنطلق عليها اسم "البرمجة الخطية العددية". وفي معظم الأحيان فإنه ولحل هذا النوع الأخير من المسائل لابد لنا أولاً من إسقاط مثل هذا الشرط الإضافي وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والذي سيكون منطلقاً يسهل علينا عملية الوصول إلى حل مسألة البرمجة العددية الأصلية. ونظرا لأن مقررا على الأقل في البرمجة الخطية هو متطلب سابق لمقرر البرمجة العددية فإننا لا نجد ضرورة في التوسع في موضوعات البرمجة الخطية والتي سنوردها في الفصل الأول من هذا الكتاب. وسنكتفي بإعطاء ما نجده ضروريا في

البرمجة الخطية لخدمة نظرية البرمجة العددية وطرق الحل المتبعة لحل مسائلها، وكمقدمة لابد منها لمن لا يملك خلفية كافية عن البرامج الخطية وطرق حلها.

وسنستعرض في الفصل الثاني بعض الأمثلة البسيطة على أنماط البرمجة العددية وبعض الطرق البسيطة لحلها ويمثل هذا الفصل مدخلاً لابد منه إلى موضوعات البرمجة العددية التي سترد في الفصول التالية، كما أنه قد يكون كافياً لمن يرغب في أخذ فكرة سريعة عن مسائل البرمجة العددية وكيفية تصنيفها وحلها.

ونظراً لاتساع المجالات التطبيقية لمسائل البرمجة العددية فقد خصصنا لها الفصلين الثالث والرابع.

فاستعرضنا في الفصل الثالث بعض النماذج البسيطة والتي نعتقد أنها ستكفي لمن يرغب في دراسة مقرر قصير الأجل من هذه المادة واتبعنا في الفصل الرابع استعراض المزيد من نماذج البرمجة العددية المتقدمة لمن يرغب بالاطلاع على مزيد من مثل هذه النماذج.

وكما سنرى فإننا سنكون قادرين على تقديم الحلول لمعظم المسائل الواردة في هذا الباب وذلك في الباب الثاني من هذا الكتاب والذي يتكون من الفصول الخامس والسادس والسابع.

الفصل الأول

أساسيات البرمجة الخطية: الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس

Basic Linear Programming: The Graphical and the Simblex Methods

(١,١) مقدمة

تعتمد عملية اتخاذ القرارات في كثير من مسائل الواقع العملي على استخدام التحليل الكمي للوصول إلى القرار الصحيح لحل المشكلات التي نواجهها. ومن أهم المشكلات التي تواجهها معظم النظم[١] هي توزيع مواردها بشكل فعّال بغية الوصول إلى أفضل المنافع للنظام (أكبر الأرباح أو أقل الخسائر أو أفضل طاقة إنتاجية... إلخ). ففيما يتعلق بإنتاج السلع في الأنظمة مثلاً فإن الأنظمة ترغب بشكل عام في معرفة أي السلع ستنتج؟. ما الكميات الواجب استخدامها لإنتاج هذه السلع؟ ما الطريقة الواجب اتباعها للإنتاج؟.

---

(١) كافة المنشآت الصناعية والزراعية والمؤسسات والوزارات والجامعات هي أمثلة على النظم. ويعًرف النظام(جمعه نظم) بأنه مجموعة من العناصر التي تتعاون وتترابط فيما بينها لتحقيق هدف أو أهداف معينة. وبذلك فإن مفهوم النظم هو مفهوم شامل وواسع، وما يهمنا من النظم هو معالجة مشاكلها بطرق علمية توصل إلى تحقيق أهدافها.

والهدف العام من هذه المعرفة هو الوصول إلى القرار السليم الذي يحقق أهداف النظام. والوصول إلى قرار سليم ودقيق لمشكلة ما يتطلب بشكل عام أن تقبل هذه المشكلة الصياغة بمفاهيم رياضية وهو ما يعرف باسم "البرمجة الرياضية". وتعتبر "البرمجة الخطية" من أكثر أنواع البرمجة الرياضية المستخدمة في حل الكثير من مشكلات توزيع موارد النظم بطرق فعّالة. وتعرف البرمجة الخطية اختصاراً على أنها طريقة لمعالجة النماذج الخطية في بحوث العمليات حيث تكون كل من دالة الهدف والقيود هي دوال خطية في متغيرات القرار. وتتعامل البرمجة الخطية بشكل خاص مع المسائل التي تتضمن إيجاد أفضل قيمة لدالة الهدف (أكبر قيمة في حالة المنفعة أو الأرباح وأصغر قيمة في حالة التكاليف أو الخسائر) تحت عدد من القيود الناتجة عن محدودية الموارد في معظم الأحيان إضافة إلى القيود المتعلقة بطبيعة المشكلة المدروسة وشروطها. وتعبر دالة الهدف عادة عن هدف اقتصادي كالأرباح أو الإنتاج أو التكاليف أو ساعات أو أيام العمل الأسبوعية أو الحمولة... إلخ.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت ولا تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال نذكر منها: مسائل الإنتاج المختلط، مسائل المزج، مسائل تخطيط الإنتاج والتخطيط المالي وتخطيط المشروعات، مسائل المبيعات والإعلانات وتحليل الأوراق والأسهم التجارية، مسائل النقل والتخصيص، نظرية المباريات وغيرها كثير. وتعتبر البرمجة الخطية من أكثر الطرق المستخدمة في صناعة القرارات بشأن المشكلات التي تواجهها بحوث العمليات في الحقول المختلفة كالصناعة والزراعة والإدارة والتخطيط والميدان العسكري ... إلخ.

وسنتعرض في هذا الفصل لبعض الأمثلة البسيطة التي تعتمد على متغيرين مستقلين فقط حيث سنقوم بإيجاد الحلول "بالطريقة البيانية Graphical Method ". ومع أن الطريقة البيانية سهلة الفهم والمعالجة فإنها لا تصلح إلا للمسائل التي تعتمد فيها دالة الهدف والقيود على متغيرين مستقلين أو تلك المكافئة لها. وسنقوم لذلك بدراسة

طريقة أخرى تسمى "طريقة السمبلكس Simplex Method " تصلح لحل جميع مسائل البرمجة الخطية بأي عدد من المتغيرات المستقلة. ولا بد للقارئ أولاً من أخذ فكرة عن المجموعات المحدبة نظرا لأهميتها في النظريات الأساسية التي سنعتمد عليها في حل البرامج الخطية وهو ما خصصنا له الفقرة الأولى من الملحق.

(١,٢) أمثلة نموذجية على البرمجة الخطية بمتغيرين

مثال (١,١)

لدى شركة بترومين مصنعاً لصناعة وقود الطائرات يقوم بإنتاج صنفين I و II من هذا الوقود وتقدر الأرباح العائدة لكل وحدة مصنوعة من الصنف I بـ 200 ريال أما الأرباح العائدة لكل وحدة مصنوعة من الصنف II فتقدر بمقدار 140 ريالاً. تمر عمليات إنتاج الوقود في أربعة أقسام ونتيجة للدراسة التي قام بها المختصون في الأقسام الأربعة تبين أن محدودية الوقت المتوافر هي العنصر الوحيد ذو الصلة بمحدودية الطاقة الإنتاجية. يبين الجدول رقم (١,١) الوقت(بالساعة) الذي تطلبه صناعة كل وحدة من الصنفين I و II في كل من الأقسام الأربعة وطاقة الوقت المتوافرة في كل من هذه الأقسام (بالساعة شهرياً). وفقاً لهذه البيانات فإن الشركة ترغب بمعرفة كم ستنتج من كل من صنفي الوقود كي تحقق أكبر ربح شهري ممكن. المطلوب كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لها.

الحل

نلخص عناصر المسألة في الأهداف ، المتغيرات ، والقيود على النحو التالي :

الأهداف

إيجاد برنامج إنتاجي لصنفي الوقود I و II الذي يحقق أكبر ربح شهري ممكن للشركة. لنرمز لهذا الربح الشهري بالرمز Z.

المتغيرات

كما هو واضح من نص المسألة في المثال فإن المتغيرات ذات الصلة بالمشكلة هي :

- عدد الوحدات الواجب إنتاجها شهرياً من كل من صنفي الوقود. لنرمز بالرمز x_1 لعدد الوحدات المنتجة من الصنف I وبالرمز x_2 لعدد الوحدات المنتجة من الصنف II . x_1 و x_2 هي متغيرات القرار في هذه المسألة (الأنشطة التي يقوم بها هذا النظام هي إنتاج الصنف I وهو النشاط الأول وإنتاج الصنف II وهو النشاط الثاني).

الجدول رقم (١,١).

القسم	الوقت بالساعة اللازم لصناعة الوحدة		طاقة الوقت بالساعة المتوافر للقسم شهرياً كحد أقصى
	الصنف I	الصنف II	
1	3	0	6000
2	0	2.9	8000
3	2.5	2	7500
4	1.3	1.5	5000

كتابة الدالة Z بدلالة المتغيرات

من الواضح أن :

$$Z = 200\, x_1 + 140\, x_2$$

القيود

بالإضافة إلى قيود اللاسلبية الناتجة عن طبيعة المتغيرات x_1, x_2 ($x_1 , x_2 \geq 0$) فإن القيود الوحيدة هي تلك الناتجة عن محدودية الوقت المتوافر شهرياً في الأقسام الأربعة، وهذه القيود هي :

أ) القيد المتعلق بالقسم (1) هو توافر 6000 ساعة شهرياً كحد أقصى وهذا القسم مخصص للصنف I فقط. وبما أن كل وحدة من هذا الصنف تستغرق 3 ساعات فإنه يمكن التعبير عن هذا القيد بالمتباينة $3\, x_1 \leq 6000$.

ب) وبالمثل يمكننا التعبير عن القيود المتعلقة بالأقسام 2 ,3 و 4 وفقاً للبيانات المعطاة في الجدول رقم (١,١) بالمتباينات التالية على الترتيب.

$$2.9\, x_2 \le 8000$$

$$2.5\, x_1 + 2\, x_2 \le 7500$$

$$1.3\, x_1 + 1.5\, x_2 \le 5000$$

صياغة المسألة أو النموذج الرياضي

كبر الدالة :

$$Z = 200\, x_1 + 140\, x_2 \qquad (١,١)$$

وفقاً للقيود :

$$3\, x_1 + 0.\, x_2 \le 6000 \qquad (١,٢)$$

$$0.\, x_1 + 2.9\, x_2 \le 8000 \qquad (١,٣)$$

$$2.5\, x_1 + 2\, x_2 \le 7500 \qquad (١,٤)$$

$$1.3\, x_1 + 1.5\, x_2 \le 5000 \qquad (١,٥)$$

$$x_1\, ,\, x_2 \ge 0 \qquad (١,٦)$$

حل النموذج

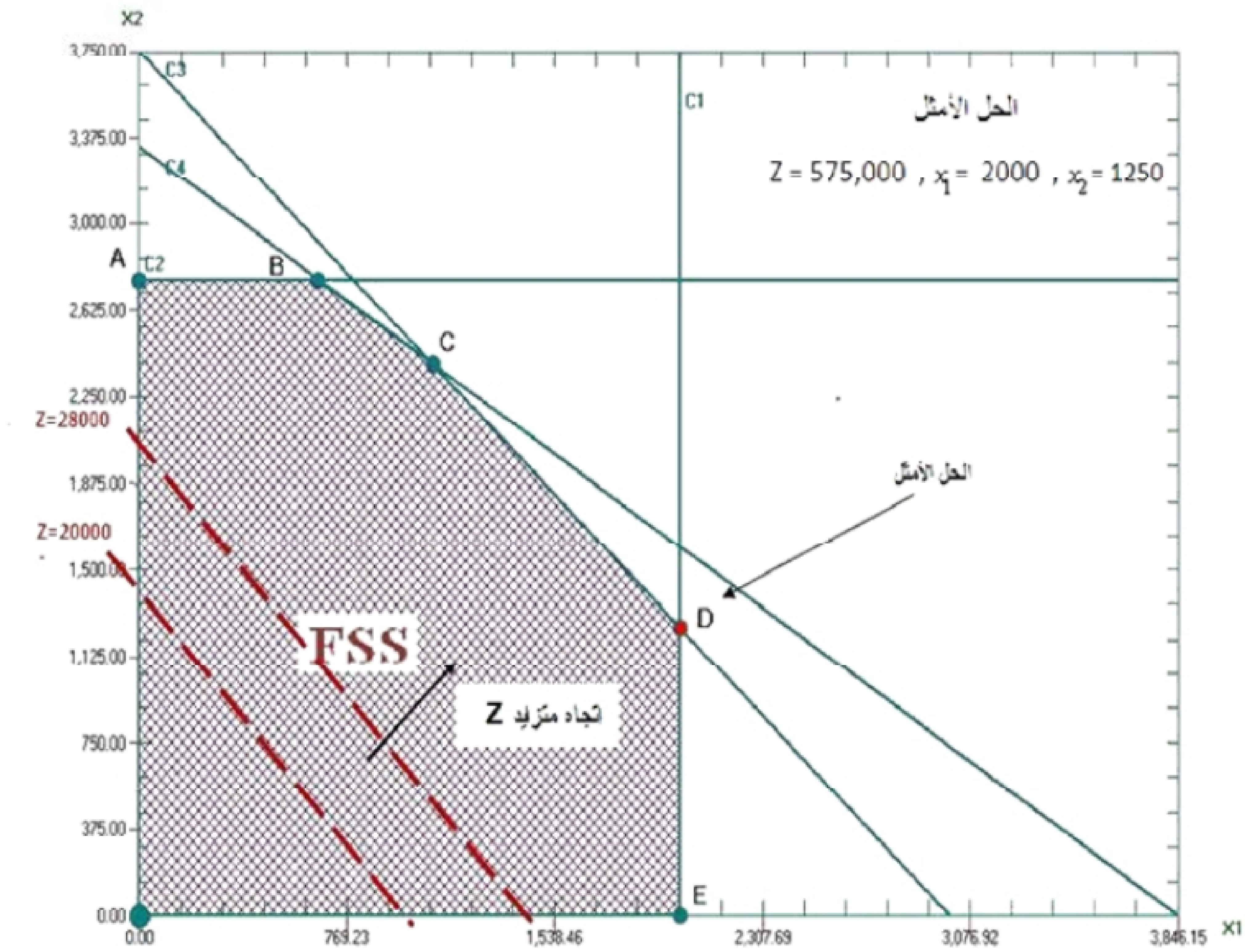
إن حل النموذج يعني إيجاد فضاء الحل الممكن (Feasible Solution Space(FSS " ومن ثم إيجاد الحل الأمثل من هذا الفضاء والذي يشار إليه عادةً "تحليل الأمثلية Optimality Analysis". إن فضاء الحل الممكن هو ذلك الفضاء الذي يحقق جميع القيود. وبالنسبة لهذا المثال فإن فضاء الحل الممكن هو مجموعة النقاط (x_1 , x_2) التي تحقق جميع القيود من (١,٢) – (١,٦). نلاحظ أولاً أن القيد (١,٦) يعني أن منطقة الحل المشترك للقيود مقصورة على الربع الأول. فلو أخذنا مقياسا للرسم قدره 1/1000 لأمكننا أن نجد بسهولة أن الحل المشترك للمتباينات (القيود) (١,٢) – (١,٦) هو مجموعة النقاط الواقعة على محيط المضلع (لأن المساواة تدخل في جميع القيود) OABCDE وداخله (الشكل رقم ١,١). فالحل الأمثل هو النقطة أو النقاط من الفضاء FSS (محيط المضلع OABCDE وداخله) التي تكون عندها الدالة Z المعرفة بالعلاقة (١,١) أكبر ما يمكن . فإذا لاحظنا أن فضاء الحل الممكن هو مجموعة محدبة[٢-أ] وأن العلاقة (١,١) تمثل عائلة من المستقيمات المتوازية(كل قيمة لـ Z تعطي أحد أعضاء هذه العائلة) فإنه يمكن الحصول على النقطة أو النقاط من الفضاء FSS والتي تجعل الدالة Z أكبر ما يمكن وذلك بتحريك أحد هذه المستقيمات باتجاه تزايد الدالة Z حتى يمس هذا المستقيم فضاء الحل في أبعد نقطة منه في اتجاه تزايد Z . ولتحديد اتجاه تزايد أو تناقص Z يكفي أن نعطي Z قيمتين اختياريتين مناسبتين[٢-ب]. مثلاً $Z = 200000$ و$Z=280000$ ثم نرسم المستقيمين

---

(٢) (أ) راجع مفهوم المجموعات المحدبة في الملحق

(ب) نعني بكلمة قيم مناسبة للدالة Z بأنها تلك التي تمكننا من رسم المستقيمات Z الناتجة بشكل سهل وواضح على نفس الشكل الذي يمثل فضاء الحل FSS . فمثلاً من فضاء الحل لمثال (١,١) نجد أن قيم x_1 تتراوح بين الصفر و٢٠٠٠ وأن قيم x_2 تتراوح بين الصفر و8000/2.9 فلو أخذنا$x_1 = 1000$, x_2=١٠٠٠ لكانت$Z=340000$ ومن هنا نقول إن قيم Z المناسبة هي بمئات الآلاف.

الناتجين $200x_1 + 140x_2 = 200000$ و $200x_1 + 140x_2 = 280000$ على الشكل نفسه الذي عيَّنا عليه فضاء الحل ونحدِّد من خلالها اتجاه تزايد Z (الشكل رقم ١,١). فإذا حركنا أحد هذين المستقيمين باتجاه تزايد Z نجد أنه يمس الفضاء FSS في النقطة D كأبعد نقطة من هذا الفضاء في هذا الاتجاه. نقول إن النقطة D" تمثِّل الحل الأمثل "



الشكل رقم (١,١). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل لمثال (١,١).

لإيجاد الحل الأمثل نوجد إحداثيات النقطة D وقيمة Z عند D . ونحصل على إحداثيات D بحل معادلتي المستقيمين $x_1 = 2000$ و $2.5x_1 + 2x_2 - 7500 = 0$ المتقاطعين في D فنجد أن إحداثيات D هي :

$x_1 = 2000$ و $x_2 = 1250$

وأن : $Z\,(D) = 200\,(2000) + 140\,(1250) = 575000$ ريال

فالبرنامج الشهري الأمثل لإنتاج صنفي الوقود هو أن تنتج الشركة $x_1^* = 2000$ وحدة من الصنف I و $x_2^* = 1250$ وحدة الصنف II وتحقق بذلك أكبر ربح شهري ممكن وقدره $Z^* = 575000$ ريال .

مثال (١,٢)

يقوم أحد مصانع الأدوية بإنتاج نوع من أقراص فيتامين B المركب وذلك بمزج مكونين I و II من المكونات التي تحوي على نسب عالية من هذا الفيتامين. تحوي كل أوقية (وحدة) من المكون I على 10 ملغ من فيتامين B_1 و 0.15 ملغ من فيتامين B_2 و 1.2 ملغ من فيتامين B_6 و 0.55 ملغ من فيتامين B_{12}. وتحوي كل أوقية من المكون II على 12.5 ملغ ، 0.6 ملغ ، 0.3 ملغ و 0.25 ملغ من فيتامين B_1, B_2, B_6 و B_{12} على الترتيب. سعر تكلفة الوحدة من المكونين I و II يقدر بمقدار 10.4 و 7.2 هللة. وتتطلب المقتضيات أن يحوي كل قرص من فيتامين B المركب على 50 ملغ ، 1 ملغ ، 3 ملغ و 2 ملغ على الأقل من فيتامين B_1, B_2, B_6, B_{12} على الترتيب. يهدف المصنع إلى جعل مجموع تكلفة المواد الداخلة في تركيب قرص B المركب أقل ما يمكن. ما الكميات من كلا المكونين I و II الواجب إدخالها في صناعة هذا القرص لتحقيق ذلك الهدف؟

الحل

الأهداف

جعل تكلفة المواد الداخلة في إنتاج القرص من فيتامين B المركب(ولتكن Z) أقل ما يمكن.

المتغيرات

يتَّضح من نص المسألة ومن الأهداف أن المتغيرات ذات الصلة بالمسألة والتي يمكن لصاحب القرار (المصنع) أن يتحكم بها ضمن شروط المسألة هي الكميات (بالوحدة) الواجب إدخالها من المكونين I و II في صناعة كل قرص من فيتامين B المركب ولنرمز لها بـ x_1 ، x_2 على الترتيب (x_2, x_1 هما متغيرا القرار).

كتابة الدالة Z بدلالة المتغيرات

من الواضح أن الدالة Z والتي تعبِّر عن تكاليف إنتاج قرص B المركب هي

$$Z = 10.4x_1 + 7.2x_2$$

القيود

من نص المسألة نجد أن هناك نوعين من القيود :

الأولى: وتتعلق بمتطلبات وجود حد أدنى (بالملغ) من الفيتامينات B_1 ، B_2، B_6 ، وB_{12} بكل قرص. وفقاً لمعطيات المسألة فإنه يمكن التعبير عن هذه القيود بدلالة المتغيرات x_2, x_1 بالمتباينات التالية :

$10x_1 + 12.5x_2 \geq 50$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_1
$0.15x_1 + 0.6x_2 \geq 1$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_2
$1.2x_1 + 0.3x_2 \geq 3$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_6
$0.55x_1 + 0.25x_2 \geq 2$	تحقق الحد الأدنى بالملغ من فيتامين B_{12}

الثانية: قيود اللاسلبية الناتجة عن طبيعة المتغيرات x_1, x_2 وهي :

$$x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0$$

صياغة المسألة أو النموذج الرياضي

صغِّر الدالة :

$$Z = 10.4x_1 + 7.2x_2 \qquad (١,٧)$$

وفقاً للقيود:

$$10x_1 + 12.5x_2 \geq 50 \qquad (١,٨)$$

$$0.15x_1 + 0.6x_2 \geq 1 \qquad (١,٩)$$

$$1.2x_1 + 0.3x_2 \geq 3 \qquad (١,١٠)$$

$$0.55x_1 + 0.25x_2 \geq 2 \qquad (١,١١)$$

$$x_1 \geq 0 \, , \, x_2 \geq 0 \qquad (١,١٢)$$

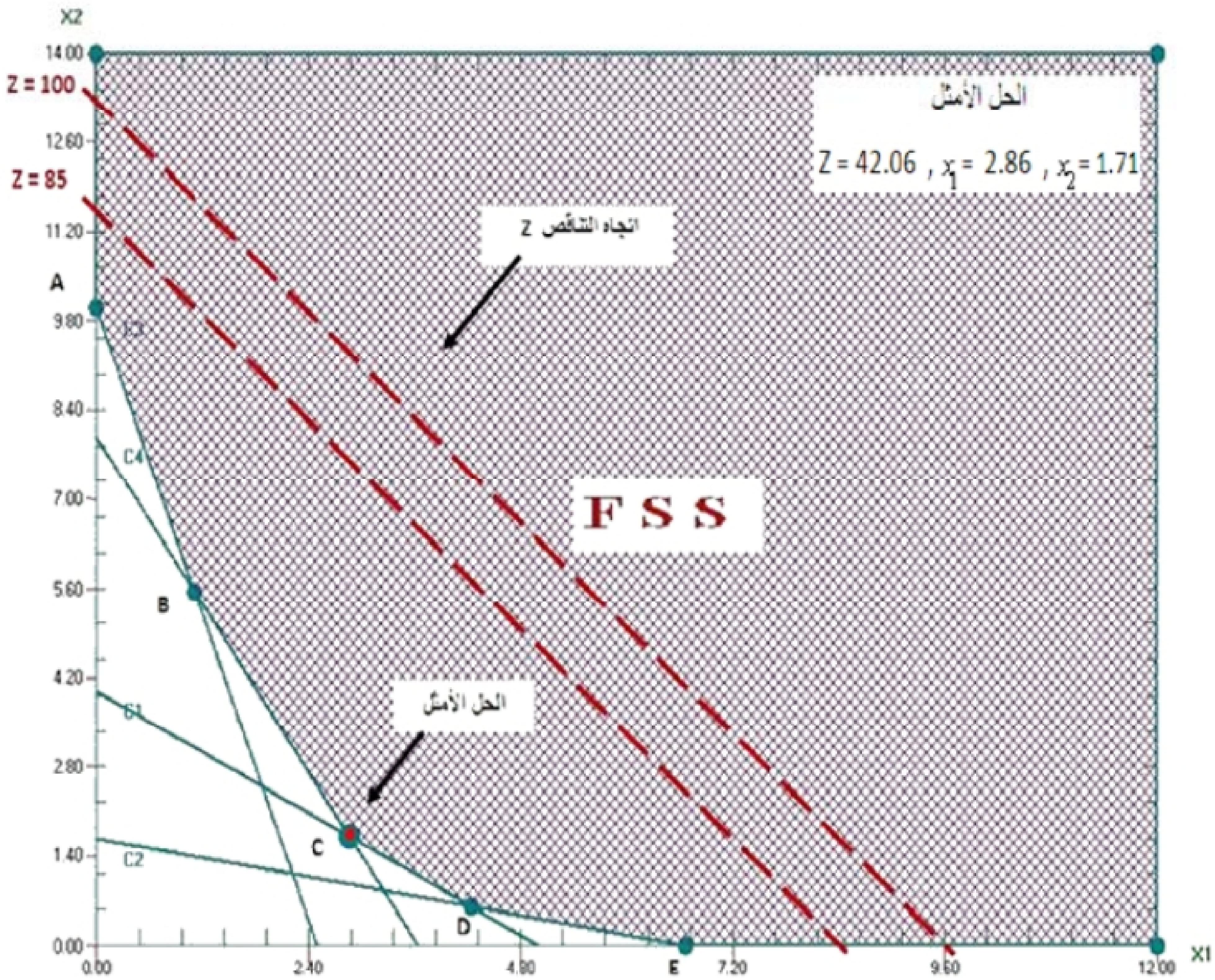
حل النموذج

بطريقة مماثلة لما رأيناه في المثال السابق نجد أن المتباينات (القيود) من (١,٨) – (١,١٢) تتحقق في المنطقة المظللة من الشكل رقم(١,٢) وعلى حدود هذه المنطقة أيضاً (لأن المساواة تدخل في جميع القيود). أي أن فضاء الحل الممكن هو محيط المضلع $x_2ABCDEx_1$ وداخله المفتوح من جهتي اليمين والأعلى وغير المحدود من هاتين الجهتين. لإيجاد الحل الأمثل نقوم كما رأينا في المثال السابق بتحديد جهة تزايد أو تناقص عائلة المستقيمات Z المعرفة بالعلاقة (١,٧) بإعطاء قيمتين مختلفتين ومناسبتين لـ Z مثلاً $Z = 85$ و $Z = 100$ ورسم المستقيمين الناتجين على الشكل نفسه الذي يحدد فضاء الحل (الشكل رقم ١,٢). وبتحريك أحد هذين المستقيمين باتجاه تناقص Z (لأن الهدف هو تقليل التكاليف) حتى يمس فضاء الحل الممكن في أبعد نقطة منه نجد أن هذا التماس يحصل عند النقطة C وبذلك فإن C تمثل الحل الأمثل للمسألة المطروحة. وبحل معادلتي المستقيمين:

$$0.55x_1 + 0.25x_2 = 2 \quad \text{و} \quad 10x_1 + 12.5x_2 = 50$$

المتقاطعين في النقطة C نجد أن $C\ (x_1 = 2.857,\ x_2 = 1.714)$. ومن المعادلة (١,٧) نجد أن :

$$Z\,(C) = 10.4\,(2.857) + 7.2\,(1.714) = 42.0536$$



الشكل رقم (١,٢). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل لمثال (١,٢).

فالحل الأمثل هو أن ندخل في تركيب كل قرص B مقدار $x_1^* = 2.857$ أوقية

وفقاً للقيود :

$$2x_1 + x_2 \geq 5 \qquad (١,١٤)$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \qquad (١,١٥)$$

$$x_1 + x_2 \geq 3 \qquad (١,١٦)$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \qquad (١,١٧)$$

الحل

يمكننا التحقق بسهولة من أن القيود من (١,١٤) – (١,١٧) تتحقق في داخل وعلى محيط المضلع $PQRSx_1$ المفتوح من الأعلى واليمين (الشكل رقم ١,٣).

فللفضاء FSS ثلاث نقاط ركنية هي R, S و Q وبإعطاء Z قيمتين مختلفتين ومناسبتين مثلاً $Z = 60$ و $Z = 90$ ورسم المستقيمين الناتجين نجد أن دالة الهدف تتناقص باتجاه حدود الفضاء FSS وليس بالاتجاه المفتوح لهذا الفضاء فالحل الأمثل موجود ومحدود. كما أن هذا الحل وحيد ؛ لأن المستقيمات Z لا توازي أيًّا من حدود الفضاء FSS وبحسب نظرية نقطة الركن فإن الحل الأمثل يتمثل في أحد النقاط الركنية : $Q(1, 3)$, $R(2, 1)$ و $S(3, 0)$. ولّما كان :

$$Z = (Q) = 20\,(1) + 15\,(3) = 65$$

$$Z(R) = 20\,(2) + 15\,(1) = 55$$

وفقاً للقيود :

$$2x_1 + x_2 \geq 5 \tag{١,١٤}$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 3 \tag{١,١٥}$$

$$x_1 + x_2 \geq 3 \tag{١,١٦}$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \tag{١,١٧}$$

الحل

يمكننا التحقق بسهولة من أن القيود من (١,١٤) – (١,١٧) تتحقق في داخل وعلى محيط المضلع $PQRSx_1$ المفتوح من الأعلى واليمين (الشكل رقم ١,٣).

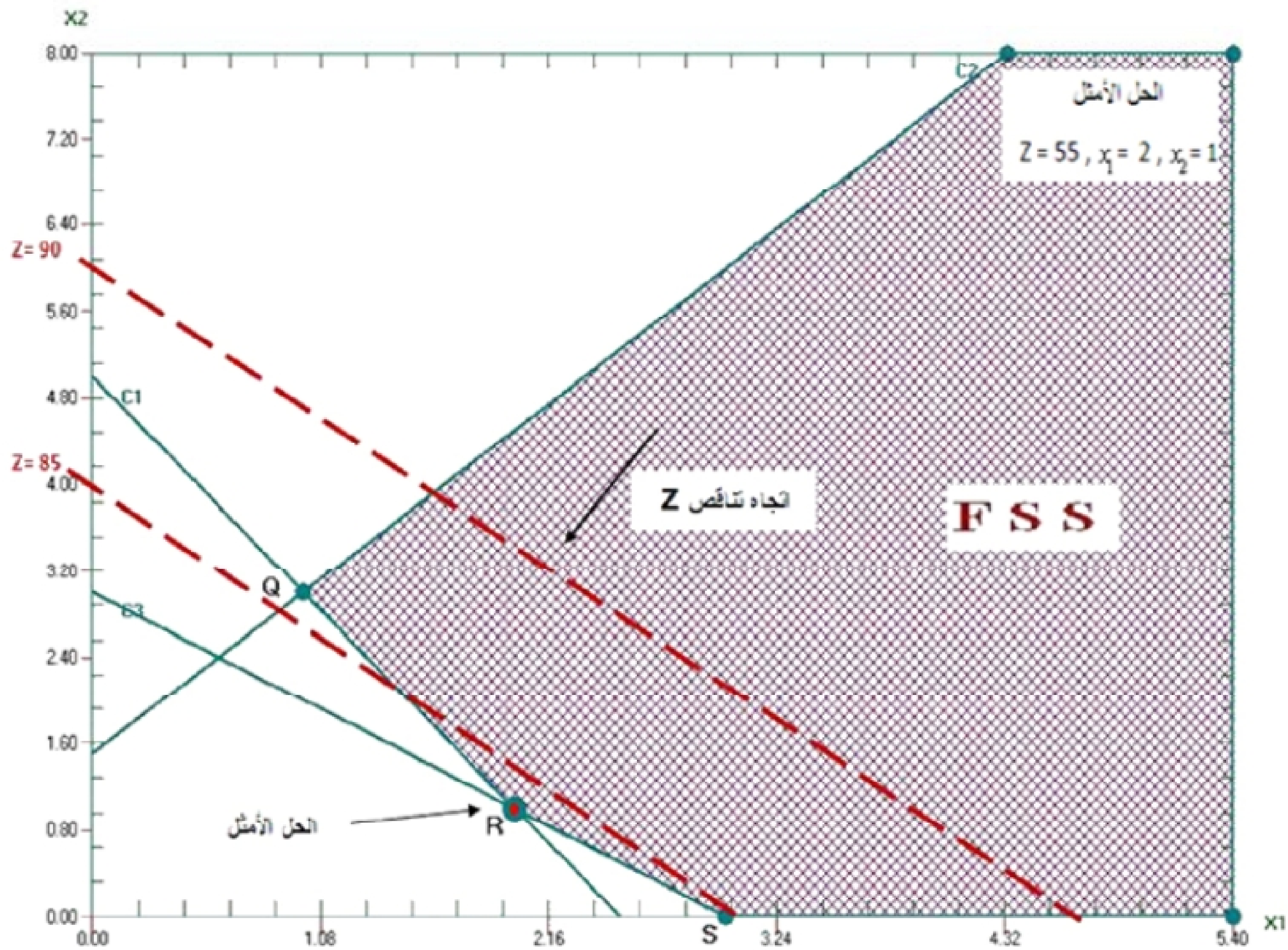
فللفضاء FSS ثلاث نقاط ركنية هي R, S و Q وبإعطاء Z قيمتين مختلفتين ومناسبتين مثلاً $Z = 60$ و $Z = 90$ ورسم المستقيمين الناتجين نجد أن دالة الهدف تتناقص باتجاه حدود الفضاء FSS وليس بالاتجاه المفتوح لهذا الفضاء فالحل الأمثل موجود ومحدود. كما أن هذا الحل وحيد ؛ لأن المستقيمات Z لا توازي أيًّا من حدود الفضاء FSS وبحسب نظرية نقطة الركن فإن الحل الأمثل يتمثل في أحد النقاط الركنية : $Q(1, 3)$ ، $R(2, 1)$ و $S(3, 0)$. ولمّا كان :

$$Z = (Q) = 20\,(1) + 15\,(3) = 65$$

$$Z\,(R) = 20\,(2) + 15\,(1) = 55$$

$$Z(S) = 20(3) + 15(0) = 60$$

فإن الحل الأمثل يتمثل في النقطة R . أي أن الحل الأمثل هو: $x_1^* = 2$ ، $x_2^* = 1$ و $Z^* = 55$.



الشكل رقم (١,٣).فضاء الحل والحل الأمثل لمثال (١,٣).

(١,٣) الثنويّــة
Duality

بالعودة إلى مثال (١,١) الخاص بإنتاج صنفي الوقود I و II لنفرض أنك تريد أن تتعهد الأقسام الأربعة في المصنع الذي يقوم بإنتاج صنفي الوقود من الشركة صاحبة

المصنع. فبما أن عنصر الوقت هو العنصر المهم الوحيد في عملية تصنيع الوقود فإن تعهدك هذا يعني أن تتعهد الوقت المتوافر (بالساعة) في الأقسام الأربعة. ولو فرضنا أن y_1, y_2, y_3 و y_4 ، تمثل تكلفة تعهدك للساعة (الوحدة) من الأقسام (1) ، (2) ، (3) ، (4) والذي يتوافر فيها 6000 ، 8000 ، 7500 ، 5000 ساعة على الترتيب، لكانت التكلفة الكلية لتعهدك ولنرمز لها بالرمز W معطاة بالعلاقة :

$$W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ومن الطبيعي أن هدفك عندئذ هو جعل التكلفة الكلية لتعهدك أقل ما يمكن. ويمكن التعبير عن هذا الهدف كما يلي :

صغّر الدالة :

$$W = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4$$

ولكن ثمة قيود ضمنية تواجهك حيال تحقيق هدفك وهي أن تدفع للشركة صاحبة المصنع عن كل وحدة تنتجها من صنفي الوقود I و II تعويضاً لا يقل عن الأرباح التي تجنيها الشركة من هذه الوحدة. ولما كانت الوحدة من الصنف I تستهلك 3 ساعات من وقت (موارد) القسم (1)، 0 ساعة من وقت القسم (2)، 2.5 ساعة من وقت القسم (3) و 1.3 ساعة من وقت القسم (4) فإن تكلفة تعهدك للوحدة من الصنف I والتي تساوي $3y_1 + 0.y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4$ يجب ألا تقل عن 200 ريال وهو الربح العائد للشركة من إنتاج وحدة من الصنف I ، وإلا فإن الشركة لن توافق على عرضك ؛ لأنه سيكون من الأفضل لها عندئذ أن تقوم هي نفسها بإنتاج الصنف I من الوقود. وبالمثل لابد أن يكون تكلفة تعهدك للوحدة من الصنف II والتي تساوي $0.y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4$ لا يقل عن 140 ريالاً وهو الربح العائد للشركة من الصنف II. ثمة قيد ضمني

آخر هو أن تكون قيمة تعهدك لوحدة من أي قسم من الأقسام الأربعة مقداراً غير سالب. وبذلك فإن مشكلة تعهدك تتلخص بحل المسألة التالية :

صغّر الدالة :

$$w = 6000y_1 + 8000y_2 + 7500y_3 + 5000y_4 \qquad (١,١٨)$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 + 0.y_2 + 2.5y_3 + 1.3y_4 \geq 200$$

$$0\,y_1 + 2.9y_2 + 2y_3 + 1.5y_4 \geq 140$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

ويسمى النموذج (١،١٨) باسم " النموذج الثنوي Dual Model " للنموذج المعطى بالعلاقات (١،١٣) – (١،١٧) والذي نطلق عليه اسم " النموذج الأولي Primal Model ". وما رأيناه بالنسبة لمثال (١،١) صحيحاً بالنسبة لأي برنامج خطي آخر . وتعتبر هذه الميزة من أهم مميزات البرمجة الخطية.

فلكل مسألة تصغير (تكبير) يقابلها مسألة تكبير (تصغير) وتتضمن المسألتان البيانات نفسها ويطلق على أحدها اسم " المسألة الأولية Primal Problem " أو النموذج الأولي وعلى الأخرى اسم " المسألة الثنوية Dual Problem " أو النموذج الثنوي. ويمكن اشتقاق أي من المسألتين من الأخرى مباشرة وفقاً للقواعد التالية :

[لاحظ تحقق هذه القواعد بالنسبة للمسألة الثنوية لمسألة المثال (١،١)]

- كل قيد في أحد النموذجين يقابله متغير مستقل في النموذج الآخر ويستثنى من ذلك قيود اللاسلبية.

- الأطراف اليمنى للقيود في أحد النموذجين تصبح معاملات لمتغيرات القرار في دالة الهدف للنموذج الآخر.
- إذا كان الهدف في أحد النموذجين هو التصغير (التكبير) فإن الهدف في النموذج الآخر هو التكبير (التصغير).
- جميع القيود في نموذج التكبير هي من نوع ≤ وجميع القيود في نموذج التصغير هي من نوع ≥.
- المتغيرات في كلا النموذجين غير سالبة.
- المعاملات السطرية في الأطراف اليسرى للقيود في أحد النموذجين تصبح معاملات عمودية في الأطراف اليسرى لقيود النموذج الآخر.

وسنعطي مزيداً من التفصيل حول هذه القواعد بعد دراسة المثال التالي:

مثال (١,٤)

أوجد المسألة الثنوية للمسألة التالية:

كبر الدالة :

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \qquad (١,١٩)$$

وفقاً للقيود:

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$-x_1 + 2x_2 \ge 1$$

$$2x_1 - 5x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \leq 0$$

الحل

بما أن المسألة تكبير فإننا نقوم بتحويل جميع القيود إلى الشكل ≤ كذلك فإننا نستبدل المتغير x_2 بمتغير $x_3 = -x_2$ فنحصل على النموذج المكافئ التالي:

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 - 3x_3 \qquad (١,٢٠)$$

وفقاً للقيود:

$$3x_1 - 5x_3 \leq 15$$

$$x_1 - 2x_3 \leq -1$$

$$2x_1 + 5x_3 \leq 1$$

$$-2x_1 - 3x_3 \leq -1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

والنموذج الثنوي للنموذج (١,٢٠)) هو:

صغر الدالة :

$$W = 15y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \qquad (١,٢١)$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 + y_2 + 2y_3 - 2y_4 \geq 2$$

$$5y_1 - 2y_2 - 5y_3 + 5y_4 \geq 3$$

$$y_1 , y_2 , y_3 , y_4 \geq 0$$

ولو تفحصنا النموذج(١,٢١) لأمكننا ملاحظة أنه يمكن استبدال المتغير y_2 بمتغير جديد y_5 بحيث إن $y_2 = - y_5$ وكذلك استبدال الفرق $y_3 - y_4$ بمتغير جديد $y_6 = y_3 - y_4$. لاحظ أن المتغير y_5 غير موجب أي $y_5 \leq 0$ كما أن المتغير y_6 غير مقيد بإشارة ؛ لأنه ممثل بالفرق بين متغيرين موجبين. وبذلك يصبح النموذج(١,٢١) على النحو التالي :

صغر الدالة :

$$W = 15y_1 + y_5 + y_6 \qquad (١,٢٢)$$

وفقاً للقيود :

$$3y_1 - y_5 + 2 y_6 \geq 2$$

$$5y_1 + 2 y_5 - 5 y_6 \geq 3$$

$y_1 \geq 0$,

$y_5 \leq 0$

y_6 غير مقيد بإشارة

الآن لو تفحصنا النموذج الأصلي (١,١٩) والنموذج النهائي(١,٢٢) لأمكننا الوصول إلى القاعدة التالية :

قاعدة (١ ,١)

لكل مسألة برمجة خطية الهدف فيها تكبير(تصغير) مسألة ثنوية متعلقة بها الهدف فيها تصغير(تكبير) وتسمى أحدهما "المسألة الأولية" ونموذجها "النموذج الأولي" بينما تسمى الأخرى "المسألة الثنوية" ونموذجها "النموذج الثنوي" وتحتوي المسألتين نفس البيانات على النحو التالي:

١- عدد المتغيرات في إحدى المسألتين يساوي عدد القيود في المسألة الأخرى بحيث إن كل متغير في أحدهما يقابله قيد في الأخرى والعكس بالعكس.

٢- الأطراف اليمنى في قيود إحدى المسألتين تصبح معاملاتً لمتغيرات القرار في المسألة الأخرى وبنفس ترتيب التقابل بين القيود والمتغيرات.

٣- كل قيد طبيعي (نذكر هنا بأن القيد الطبيعي بالنسبة لمسائل التكبير هو من النوع $\leq$ وبالنسبة لمسائل التصغير هو من النوع $\geq$) في إحدى المسألتين يقابله متغير غير سالب في المسألة الأخرى والعكس بالعكس.

٤- كل قيد غير طبيعي (نذكر هنا بأن القيد غير الطبيعي بالنسبة لمسائل التكبير هو من النوع $\geq$ وبالنسبة لمسائل التصغير هو من النوع $\leq$) يقابله متغير غير موجب والعكس بالعكس.

٥- كل قيد مساواة في إحدى المسألتين يقابله متغير غير مقيد بإشارة في المسألة الأخرى والعكس بالعكس.

٦ - المعاملات السطرية في الأطراف اليسرى لقيود إحدى المسألتين تصبح معاملات عمودية في الأطراف اليسرى لقيود المسألة الأخرى والعكس بالعكس مع مراعاة ترتيب التقابل بين القيود والمتغيرات.

لاحظ أن جميع القواعد السابقة محققة في النموذجين (١,١٩) و(١,٢٢) حيث يمكن اعتبار أحدهما بمثابة "نموذج أولي" والآخر "نموذجه الثنوي".

فمثلاً عدد القيود في النموذج (١,١٩) هو 3 = عدد المتغيرات في النموذج (١,٢٢) بحيث إن كل قيد يقابله متغير. فالمتغير $y_1 \geq 0$ يقابل القيد الأول(قيد طبيعي) والمتغير$0 \leq y_5$ يقابل القيد الثاني(قيد غير طبيعي) والمتغيرy_6 غير مقيد بإشارة يقابل القيد الثالث (قيد مساواة)، ومعاملات هذه المتغيرات في الدالة W هي نفس الأطراف اليمنى للقيود المقابلة لهذه المتغيرات. وهكذا نستطيع التحقق من باقي القواعد. أما العلاقة بين حلول المسألتين فتلخصه النظرية التالية والتي تعرف باسم"نظرية الثنوية Dual Theorem ".

نظرية (١,٢)

(أ)إذا كان لكل من المسألتين الأولية والثنوية حلول ممكنة فيوجد لكل منهما عندئذ حلاً أمثلياً وتكون قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الأولية مساوية لقيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الثنوية.

(ب) إذا وجد لأي من المسألتين حل أمثل محدود فإن للأخرى حل أمثل محدود وتكون قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل لأحدهما مساوية لقيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للأخرى أي $Z^* = W^*$.

(ج) يمكن إيجاد قيم متغيرات القرار لإحدى المسألتين من خلال جدول الحل الأمثل للأخرى (وهو ما يعرف باسم "سعر الظل Shadow Price " كما سنرى لاحقاً)

شريطة أن تكون قيود نموذج المسألة المحلولة مكتوبة بالشكل ≤ وأن تكون الأطراف اليمنى لهذه القيود موجبة والذي سنطلق عليه اسم "الشكل النموذجي Typical Model" .

(١,٤) تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

نظراً لأننا اقتصرنا حتى الآن على حل البرامج الخطية القابلة للحل بطريقة بيانية فإننا سنعطي فكرة عن تحليل الحساسية بطريقة بيانية أيضاً من خلال إجراء تحليل حساسية لنتائج المثال (١,١) السابقة المتعلق بإنتاج مصنع لصنفين من الوقود I و II [راجع مثال (١,١)]. فبعد أن توصل المختصون إلى البرنامج الأمثل الشهري لكل من صنفي الوقود قد يطرأ تعديل على بعض البيانات نتيجة لتغير بعض العوامل من داخل أو من خارج المصنع كتوافر طاقة أكبر من الوقت لبعض الأقسام التي تمر عبرها عملية صناعة الوقود وذلك نتيجة لشراء آلات تصنيع جديدة أو نتيجة لزيادة عدد العاملين لتلك الأقسام أو كنقص الوقت الذي تستهلكه الوحدة في بعض الأقسام نتيجة استخدام أساليب أو آلات حديثة فيها أو كنقص أو زيادة الأرباح العائدة لكل صنف من الوقود أو كنقص أو زيادة عدد الوحدات من أحد أو كلا الصنفين المطلوبة في السوق أو كظهور بعض المشكلات الجديدة التي تؤدي إلى ضرورة إدراج و/أو حذف بعض القيود غير قيود الوقت الواردة في المثال ... إلخ وترغب الشركة المالكة للمصنع في مثل هذه الحالات معرفة مدى تأثير مثل هذه التغيرات على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو ترغب بمعرفة التغيرات التي يمكن للشركة أن تجربها بحيث تحسن من برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو بحيث تبقى على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي أو على برنامج قريب منه جداً والذي تحصل من أجله الشركة على مرونة أكبر في توزيع مواردها أو على مرونة أكبر في التكيف مع القيود المفروضة على الشركة من البيئة المحيطة. ولتوضيح هذه الأمور نعود إلى مسألة إنتاج الوقود في مثال(١,١) ونحاول إجراء تغييرات في بيانات المسألة وملاحظة أثر هذه التغيرات على المنتج.

تغيير في الموارد المتوافرة

يمكن للموارد المتوافرة لنظام أن تتغير زيادة أو نقصاناً. ففي مثال (١,١) يمكن للوقت المتوافر للشركة أن يتغير في حالات متعددة كزيادة أو نقص عدد ساعات العمل اليومية أو اللجوء إلى الوقت الإضافي أو استخدام آلات تصنيع أكثر كفاءة إنتاجية ... إلخ. وترغب الشركة في مثل هذه الحالات أن تعرف مدى تأثير مثل هذه التغيرات على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي. وبعبارة أخرى فإن الشركة تهتم عادة بمعرفة أي الموارد التي يمكن زيادتها والتي ترفع من قيمة الحل الأمثل Z^* وأي الموارد التي يمكن إنقاصها دون أن يتغير الحل الأمثل وقيمته؟ وللإجابة نلاحظ أن الحل الأمثل متمثل في النقطة D ومن المتوقع لذلك أن تكون أكثر القيود تأثيراً أو ارتباطا في الحل الأمثل هي تلك المحددة بالمستقيمات المتقاطعة في النقطة D الممثلة للحل الأمثل. ويطلق على مثل هذه القيود اسم "قيود وثيقة أو مترابطة Binding Constraints" ويطلق على غيرها من القيود اسم "قيود غير وثيقة أو غير مترابطة Nonbinding Constraints ". ففي مثالنا نجد أن كلاً من القيدين (١,٢) و(١,٤) المتعلقين بالقسم (1) والقسم (3) على الترتيب هو قيد وثيق. بينما نجد أن القيدين (١,٣) و(١,٥) المتعلقين بالقسمين (2) و(٤) على الترتيب هما قيدين غير وثيقين . لنلاحظ الآن ما يلي :

إذا رفعنا (زدنا الطرف اليمن) قيمة أي من القيدين الوثيقين فإن قيمة Z^* الحالية تتحسن (أي ترتفع). ولتوضيح ذلك نفرض أن الشركة وجدت أنه يمكن رفع ساعات القسم (3) فقط (نعني برفع أو خفض أي قيد أننا نحرك هذا القيد موازيا لنفسه). ولذلك فهي ترغب في معرفة إلى أي مدى يمكن رفع ساعات هذا القسم (مع الإبقاء على الشروط نفسها لبقية الأقسام) والذي تحصل الشركة من أجله على أفضل تحسين ممكن للحل الأمثل الحالي؟.

وإجابة نلاحظ من الشكل رقم (١,١) أنه لدى ثبات شروط بقية الأقسام عدا القسم (3) فإن أقصى نقطة يمكن أن نرفع إليها القيد (١,٤) المتعلق بهذا القسم هي

النقطة (2000,16000) D' ، حيث تصبح D' عندئذ ممثلة للحل الأمثل. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر للقيد (١,٤) عند D' هي 8200 فإنه يمكن رفع ساعات العمل بالقسم (3) بمقدار 700 ساعة شهرياً لنحصل بموجبها على أرباح شهرية مقدارها $Z^* = 624000$ ريال أي بزيادة 49000 ريال في الشهر عما سبق. لاحظ من جهة ثانية أن أي خفض في القيد (١,٢) أو (١,٤) (تقليل في قيمة طرفه الأيمن) سيخفض من القيمة المثلى Z^*. فإذا خفضنا قيمة الطرف الأيمن لأي من القيدين غير الوثيقين إلى حد معين فإن قيمة الحل الأمثل الحالي Z^* لا تتغير. وفي مثل هذه الحالات فإن الشركة ترغب في معرفة إلى أي مدى يمكن خفض ساعات العمل في الأقسام ذات القيود غير الوثيقة دون أن يتأثر الحل الأمثل الحالي؟ فإذا عدنا على سبيل المثال إلى القيد (١,٥) المتعلق بالقسم (4) وإلى الشكل رقم (١,١) نلاحظ أنه يمكن خفض هذا القيد إلى النقطة D دون أن يتغير الحل الأمثل. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر لهذا القيد عند D هي 4475 فيمكن للشركة أن تخفض $5000 - 4475 = 525$ ساعة عمل شهرية في القسم (4) دون أن يتأثر الحل الأمثل الحالي. لاحظ هنا أن أي رفع للقيد (١,٥) لن يؤثر في الحل الأمثل. نخلص مما سبق إلى ملاحظة أمرين:

أولهما: أن أي رفع أو خفض في الموارد المتعلقة بالقيود الوثيقة يغير من قيمة الحل الأمثل وقيمته. ولذلك يشار إلى الموارد المتعلقة بالقيود الوثيقة اسم "موارد نادرة Scare Resources "

وثانيهما: أن رفع أو خفض الموارد المتعلقة بالقيود غير الوثيقة إلى حد معين لا يغير من قيمة الحل الأمثل أو قيمته. ويشار إلى الموارد المتعلقة بالقيود غير الوثيقة اسم "موارد غير نادرة أو موارد وفيرة Abundant Resources ".

ففي مثال (١,١) فإنه يمكن النظر إلى الموارد (الوقت) في القسمين (1) و(3) على أنها موارد نادرة وإلى الموارد في القسمين (2) و(4) على أنها موارد وفيرة. والسؤال

الآن: ما هو المورد (أو الموارد) النادر (النادرة) الذي (التي) يعطي (تعطي) أفضل تحسين للحل الأمثل؟.

بالطبع فإنه لدى معرفة مثل هذه المورد (الموارد) فإن أولوية معينة ستعطى لمثل هذا (هذه) المورد (الموارد) لدى رصد ميزانية لتلك الموارد (نذكّر بأن الميزانية غالباً ما تكون محدودة). ويقودنا ذلك إلى ضرورة تقدير قيمة كل وحدة إضافية للموارد النادرة. وتعرف قيمة الوحدة الإضافية لأي مورد عادة بالعلاقة التالية:

$$\text{قيمة الوحدة الإضافية لمورد} = \frac{Z^{*}\ \text{أكبر فرق ممكن في قيمة}}{\text{أكبر زيادة ممكنة في المورد}} \qquad (١،٢٣)$$

ففي مثالنا وُجد أن موارد القسمين (1) و(3) نادرة وقد وجدنا أنه يمكن زيادة مورد القسم (3) بمقدار 700 ساعة لتعطي زيادة قدرها 49000 ريال في قيمة Z^{*} وبذلك فإن قيمة الوحدة الإضافية (الساعة الإضافية) في القسم (3) تساوي $49000/700 = 70$ ريال . وإذا عدنا إلى الشكل رقم (١،١) نجد أنه يمكن رفع القيد المتعلق بالقسم (1) إلى النقطة E' (3000,0) حيث تصبح عندها النقطة E' ممثلة للحل الأمثل وقيمته Z عندها هي $Z^{*} = 600000$ أي بزيادة قدرها 25000 ريال. ولما كانت قيمة الطرف الأيسر للقيد (١،٢) المتعلق بالقسم (1) عند النقطة E' مساوية 9000 ساعة أي بزيادة قدرها 3000 ساعة فإن قيمة الوحدة (الساعة) الإضافية في القسم (1) تساوي $25000/3000 = 25/3 = 8.35$ ريالاً. وكما لاحظنا سابقاً فإن زيادة موارد أي من القسمين (2) و(4) لا تؤدي إلى زيادة في قيمة Z^{*} الأمر الذي يدل على أن قيمة الوحدة (الساعة) الإضافية في أي من القسمين (2) و(4) تساوي الصفر. وهذا أمر طبيعي؛ نظراً لأن موارد هذين القسمين (مقاسة بالساعات) هي أصلاً موارد وفيرة.

وتقود هذه النتائج إلى أنه لدى التفكير في تحسين الحل الأمثل الحالي فإن الأولوية في رصد الميزانية يجب أن تعطى للقسم (3) أولاً ثم للقسم (1). ويمكن الاستفادة من الزيادة في الموارد الوفيرة [وهي موارد القسمين (2) و(4)] بصرف الزيادة في هذه الموارد لتحسين الحل من خلال رصد قيمة هذه الزيادة إلى الموارد النادرة حسب أولويتها.

نشير في هذا الصدد إلى أن قيمة الوحدة الإضافية لمورد والمعرّفة بالعلاقة (١,٢٣) السابقة يطلق عليها اسم "سعر الظل Shadow Price". وبالتدقيق في نتائجنا السابقة في هذه الفقرة نلاحظ أن سعر الظل للمورد نفسه قد يتغير فيما لو غيرنا واحد أو أكثر من القيود المتعلقة بالموارد حيث نحصل على مسألة جديدة تستخدم الموارد نفسها التي استخدمت في المسألة الأصلية. ولما كان "السعر الحقيقي" لوحدة من مورد لا يتغير بالضرورة بتغيير ظروف المسألة فإنه ثمة فرق بين "السعر الحقيقي" و "سعر الظل" لوحدة من مورد حيث إن هذا الأخير يقيس لنا كما يتضح من العلاقة (١,٢٣) " معدل التحسن" في قيمة Z^* (القيمة المثلى لـ Z) لدى زيادة وحدة من المورد المقابل الأمر الذي يبرر تسميته سعر الظل.

تغيير في دالة الهدف

أوضحنا سابقاً أن دالة الهدف Z المعرّفة بالعلاقة (١,١) تمثل عائلة من المستقيمات المتوازية. فإذا تغير ميل عائلة هذه المستقيمات فيمكن عندئذ أن يتغير الحل الأمثل الحالي من النقطة D إلى نقطة ركنية أخرى ، الأمر الذي قد ينتج عنه عند تغير بعض القيود من قيود وثيقة إلى قيود غير وثيقة أو العكس. وما يهم الأنظمة في مثل هذه الحالات هو معرفة ما يلي :

(أ) إلى أي مدى يمكن أن نغير المعاملات في دالة الهدف بحيث لا يتغير الحل الأمثل؟

(ب) ما هو التغيير الذي يمكن إجراؤه على بعض أو كل المعاملات في دالة الهدف والذي يتغير فيه الحل الأمثل وتنقلب معه بالتالي بعض الموارد النادرة إلى موارد وفيرة أو العكس؟.

للإجابة نعود إلى مثال (١,١) فنلاحظ أن : ميل المستقيمات Z يساوي $\frac{-c_1}{c_2}=\frac{-200}{140}=\frac{-10}{7}$ حيث c_1 , c_2 هي على الترتيب معاملات x_1 , x_2 في دالة الهدف.

وبشكل عام فإن ميل أي مستقيم كتبت معادلته بدلالة متغيرين x_1 , x_2

$$(\text{ميل أي مستقيم} \quad = \quad -\frac{x_1 \text{ معامل}}{x_2 \text{ معامل}})$$

الآن، لما كان الحل الأمثل متمثلاً في النقطة D فإنه يمكننا المحافظة على هذا الحل [الإجابة على (أ)] إذا أبقينا على ميل المستقيمات Z محصوراً بين ميلي المستقيمين ED وCD المتقاطعين في D (القيدين الوثيقين بالحل الأمثل) أي :

$$-\infty = ED \text{ ميل} \leq \frac{-c_1}{c_2} \leq CD \text{ ميل} = \frac{-5}{4} \qquad (١,٢٤)$$

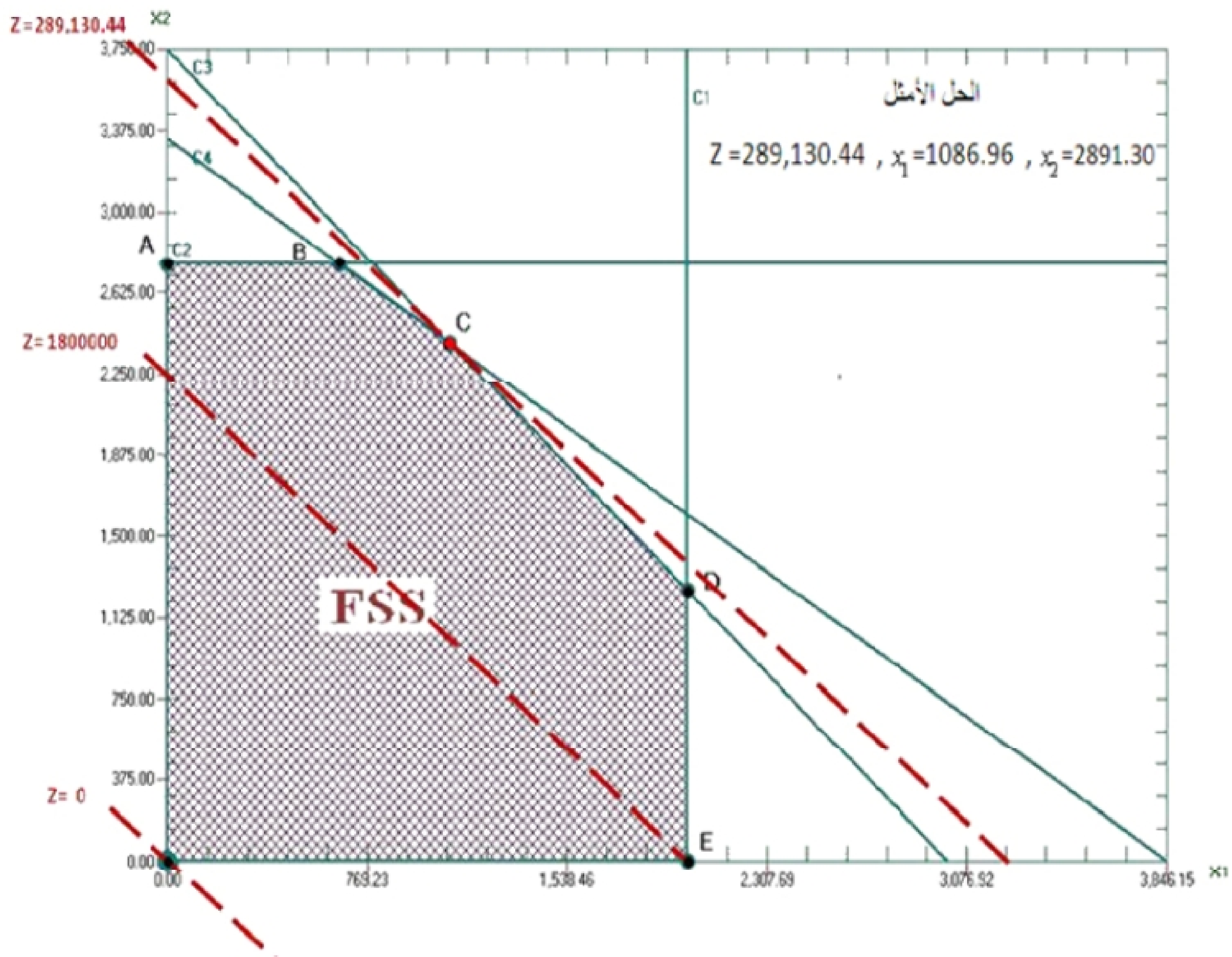
والتي تكافئ $\frac{5}{4} \geq \frac{c_1}{c_2}$. فمثلا ، إذا ثّبتنا $c_2=140$ لاستنتجنا من (١,٢٤) أن $c_1 \geq 175$ ، وإذا ثّبتنا $c_1 = 200$ لاستنتجنا من (١,٢٤) أن $c_2 \leq 160$. أي أن بإمكان الشركة أن تنقص من ربح الطن من الصنف I لحدود 175 ريالاً و/أو تزيد من ربح الطن من الصنف II لحدود 160 ريالاً دون أن يتغير برنامج الحل الأمثل الحالي (يجب الانتباه هنا إلى أن قيمة الدالة Z تتغير بشكل عام). ويمكن لمثل هذه الحالة أن تقع للشركة نتيجة لتغير بعض الظروف المحيطة كأن تقل مبيعات أحد الصنفين أمام الآخر مما قد يضطر إدارة الشركة إلى خفض أرباح سعر الصنف الذي تراجعت مبيعاته ورفع سعر ذلك الصنف الذي ارتفعت مبيعاته. وفيما يخص الصنفين معاً فيمكن للشركة أن تحافظ على برنامج الإنتاج الأمثل الحالي فيما لو حافظت على النسبة $\frac{c_1}{c_2}$ بين أرباح مبيعات الصنفين بحيث لا تقل عن $\frac{5}{4}$. ولتوضيح ذلك، هب الآن أنه لم يكن بإمكان الشركة المحافظة على $\frac{c_1}{c_2} \geq \frac{5}{4}$ حيث تراجعت أرباح الصنف I

إلى 90 ريال في حين تراجعت أرباح الصنف II إلى 80 ريال نتيجة لعدة عوامل لعبت في السوق عندئذ تصبح دالة الهدف الجديدة بعد هذا التراجع هي :

$$Z_1 = 90x_1 + 80x_2 \qquad (1,25)$$

عندئذ $\frac{c_1}{c_2} = \frac{9}{8} > \frac{5}{4}$ وعندئذ يصبح الحل الأمثل متمثلاً في النقطة $C(x_1^* = 1086.9565, x_2^* = 3736.413)$ (انظر الشكل رقم ١،٤) وقيمته $Z_1^* = 396739.13$.

وفي هذا الحال نلاحظ أن موارد القسم (4) قد انقلبت من موارد غير نادرة إلى موارد نادرة في حين أن العكس قد حدث بالنسبة لموارد القسم (1).



الشكل رقم (١،٤). فضاء الحل الممكن والحل الأمثل مثال (١،١) بعد أن تغيّرت دالة الهدف إلى تلك المعطاة بالعلاقة (١،٢٥).

ملاحظة (١,١)

في الحقيقة إن قيمة الوحدة الزائدة لأي مورد هي نفسها قيمة متغير المسألة الثنوية والمقابل لقيد ذلك المورد. ويساعدنا هذا الأمر في معرفة الحل الأمثل للمسألة الثنوية على النحو التالي:

لما كان النموذج (١,١٨) هو النموذج الثنوي للنموذج الأولي في المثال (١,١) حيث إن كل قيد في النموذج الأولي يقابله متغير في النموذج الثنوي (y_1 يقابل القيد(١,٢) وy_2 يقابل القيد (١,٣) و y_3 يقابل القيد (١,٤) و y_4 يقابل القيد (١,٥)). وحسبما رأيناه سابقاً فإن قيمة الوحدة الإضافية (وهي نفسها سعر الظل) المتعلقة بهذه القيود هي 25/3 ، 0 ، 70 ، 0 على الترتيب، فإن هذه القيم تساوي القيم المثلى للمتغيرات الثنوية y_1 ، y_2 ، y_3 ، y_4 على الترتيب. وفي هذه الحالة تكون القيم المثلى لدالتي الهدف في المسألتين الأولية والثنوية متساويتان أي أن $Z^* = 575000 = W^*$ وذلك بموجب النظرية التي أطلقنا عليها اسم نظرية الثنوية.

(١,٥) طريقة السمبلكس
The Simplex Method

(١,٥,١) الصورة الطبيعية لبرامج التكبير الخطية

نقول عن برنامج تكبير خطي أنه مكتوب بالصورة الطبيعية إذا حقق الشروط التالية:

١- الهدف تكبير.

٢- جميع القيود على الشكل ≥ (أصغر من أو يساوي).

٣- جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة.

٤- جميع المتغيرات غير سالبة.

وللتوضيح لاحظ أن نموذج المثال(١,١) مكتوب بالصورة الطبيعية.

(١,٥,٢) الصورة القياسية للبرامج الخطية

قبل حل أي برنامج خطي بطريقة السمبلكس لابد لنا من كتابته أولاً بصورة تسمى الصورة القياسية ويتم ذلك كما يلي :

(أ) نجعل جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة وذلك بضرب طرفيها بالعدد ١- للسالب منها.

(ب) نحول جميع القيود التي من الشكل $\le$ (أصغر من أو يساوي) إلى مساواة بإضافة متغير موجب إلى طرفها الأيسر. مثلاً القيد $2x_1 + 5x_2 \le 12$ يتحول إلى $2x_1 + 5x_2 + S_1 = 12$ حيث $S_1 \ge 0$ ويسمى S_1 متغير راكدٍ Slack Variable.

ويمكن تبرير هذه التسمية كما يلي: لو نظرنا إلى الطرف الأيمن من القيد على أنه المتوافر من مورد معين فإن S_1 هي كمية غير مستهلكة(راكدة) من هذا المورد.

(ج) جميع القيود التي من الشكل $\ge$(أكبر من أو يساوي) نحولها إلى مساواة بطرح متغير موجب، مثلاً القيد$3x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 7$ يتحول إلى $3x_1 + 4x_2 - x_3 - S_2 = 7$ حيث $S_2 \ge 0$ ويسمى S_2 "متغير فائض Surplus Variable " ويمكن تبرير هذه التسمية بأنه لو اعتبرنا الطرف الأيمن كمية يجب توافرها من مورد معين لكان S_2 كمية زائدة من هذا المورد.

(د) نحول جميع المتغيرات غير الموجبة أو غير المقيدة بإشارة إلى متغيرات غير سالبة على النحو التالي : (١) إذا كان $x \le 0$ فإننا نستبدله بـ $x' = -x$ عندئذ $x' \ge 0$ (٢) إذا كان x غير مقيد بإشارة فإننا نستبدله بـ$x = x^+ - x^-$ حيث$x^+ \ge 0$ و$x^- \ge 0$

(هـ) نبقي الهدف كما هو تكبيراً كان أم تصغيراً.

(١,٥,٣) خوارزمية طريقة السمبلكس لبرامج التكبير الخطية الطبيعية

The Simplex Method Algorithm for Normal Linear Programs

بعد تحويل البرنامج الخطي المكتوب بالصورة الطبيعية لبرامج التكبير إلى الصورة القياسية وذلك بإضافة ما سبق وأسميناه بالمتغيرات الراكدة (slack variables) فإن "خوارزمية طريقة السمبلكس" لهذا النوع من البرامج تتلخص بالخطوات التالية :

خطوة ابتدائية. نوجد حل ابتدائي ممكن من خلال إعطاء n (عدد متغيرات القرار في المسألة الأصلية) من المتغيرات، القيمة صفر (ونسميها "متغيرات غير أساسية Non Basic Variables")، وحل جملة المعادلات الناتجة ونسمي متغيرات الحل الناتجة (وهي المتغيرات الراكدة) باسم "متغيرات أساسية Basic Variables".

خطوة (١). نختار من الحل الذي وصلنا إليه متغير غير أساسي (صفري) كمتغير داخل على أن يتم اختيار المتغير غير الأساسي الذي يعطي *أفضل تحسين في دالة الهدف* فإذا لم نجد مثل هذا المتغير كان الحل الذي وصلنا إليه حلاً أمثلياً و إلا فإننا ننتقل للخطوة التالية.

خطوة (٢). نختار المتغير الخارج من بين المتغيرات الأساسية في الحل الذي وصلنا إليه ونجعله متغير غير أساسي في الحل التالي ونجعل ذلك متزامناً مع الوقت الذي جعلنا فيه المتغير الداخل متغيراً أساسياً.

خطوة (٣). نحدد الحل الأساسي الممكن التالي (الجديد) بعد جعل المتغير الداخل كمتغير أساسي وجعل المتغير الخارج كمتغير غير أساسي في آن واحد.

خطوة (٤). نكرر العمل اعتباراً من الخطوة (١) حتى نصل إلى الحل الأمثل بالطريقة الموضحة في هذه الخطوة.

وتعتمد هذه الخوارزمية على الحلول الجبرية للمعادلات التي نصل إليها بعد كتابة البرنامج الخطي قيد الدراسة بالشكل القياسي. ولكي تتم عملية فحص دالة الهدف بآن واحد مع القيود فإنه يتم عادة كتابة هذا البرنامج الخطي بطريقة مكافئة على نحو تظهر فيه دالة الهدف كما لو أنها أحد القيود. فمثلاً لحل المثال (١,١) السابق بطريقة السمبلكس نكتب هذا البرنامج بالشكل القياسي وهي على النحو التالي :

كبر الدالة Z وفقاً للقيود :

$$Z - 200x_1 - 140x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 0 \qquad (١,٢٦)$$

$$3x_1 + 0.x_2 + S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 6000$$

$$0.x_1 + 2.9x_2 + 0.S_1 + S_2 + 0.S_3 + 0.S_4 = 8000$$

$$2.5x_1 + 2x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + S_3 + 0.S_4 = 7500$$

$$1.3x_1 + 1.5x_2 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 + S_4 = 5000$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0$$

لاحظ أننا كتبنا دالة الهدف Z كما لو أنه أحد القيود. وسنطبق ذلك دوماً عند الحل بطريقة السمبلكس. سنوضح الآن تفاصيل العمل في خطوات خوارزمية طريقة السمبلكس من خلال حل تفصيلي للبرنامج (١,٢٦) الذي يتصف بأن كل قيد من قيوده (عدا قيود اللاسلبية وقيد دالة الهدف) يملك متغيراً راكداً (لاحظ عدم إدراج متغيرات زائفة أو فائضة ؛ لأن جميع القيود هي من النوع ≥)، وسنعود إلى توضيح التعديلات اللازمة على هذه الطريقة عندما يحتوي البرنامج الخطي على متغيرات أخرى غير المتغيرات الراكدة كالمتغيرات الفائضة أو كالمتغيرات الزائفة أو الاصطناعية .
نبدأ أولاً بإيجاد حل ابتدائي ممكن من خلال إعطاء متغيرين القيمة صفر وحل جملة المعادلات الناتجة . وفي برنامج خطي كالبرنامج (١,٢٦) (أي البرامج التي نضيف لكل قيد من قيودها – عدا قيود اللاسلبية – متغيراً راكداً) فإننا نختار نقطة الأصل O كحل

ابتدائي. ونحصل على نقطة الأصل بإعطاء جميع متغيرات القرار الأصلية(وهي متغيرات النموذج الأصلي قبل كتابته بالشكل القياسي) في النموذج ، القيمة صفر. وفي مثالنا إذا جعلنا $x_1 = x_2 = 0$ لحصلنا على الحل الابتدائي التالي : $S_2 = 8000, S_3 = 7500,$ $S_1 = 6000$ ، $S_4 = 5000$.

وكما هو ملاحظ فإن هذا الحل هو حل أساسي ممكن ويتمثل بالنقطة الركنية O كما سبق وأشرنا. وقد جرت العادة على تلخيص النماذج المتتابعة اعتباراً من النموذج القياسي الذي نبدأ به [النموذج (١،٢٦) في المثال] على شكل جداول نكتب فيها معاملات المتغيرات بدلاً من كتابة المعادلات بالكامل. ونُظهر فيها المتغيرات الأساسية والحل الأساسي الممكن الناتج بالإضافة إلى المتغير الداخل والمتغير الخارج في كل جدول. وسنطلق على أول جدول نبدأ به اسم الجدول الابتدائي. فالجدول الابتدائي في مثالنا هو الجدول رقم (١،٢) التالي :

الجدول رقم (١،٢). جدول الحل الابتدائي في مثال (١،١) [التكرار (0)].

	الأطراف اليمنى (الحل)	أمثال المتغيرات					متغير داخل ↓	متغيرات أساسية
		S_4	S_3	S_2	S_1	X_2	X_1	
عمود النسبة	0	0	0	0	0	− 140	− 200	Z
= 2000 6000/3	6000	0	0	0	1	0	3	S_1 → متغير خارج
	8000	0	0	1	0	2.9	0	S_2
= 3000 7500/2.5	7500	0	1	0	0	2	2.5	S_3
= 3846 5000/1.3	5000	1	0	0	0	1.5	1.3	S_4

ونميز المتغيرات الأساسية في الحل الحالي (الجدول رقم ٢،١) بأنها تلك المتغيرات المكتوبة في العمود المعنون " متغيرات أساسية " والتي تقع تحت السطر الذي يبدأ بـ Z (نذكر بأن Z ليست من المتغيرات الأصلية) أي أنها S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . وتظهر قيم هذه المتغيرات في العمود المعنون " الأطراف اليمنى " كما تظهر قيمة دالة الهدف في ذلك العمود مقابل السطر الذي يبدأ بـ Z (وهي صفر في الحل الحالي).

وكل متغير لا يظهر في العمود المعنون "متغيرات أساسية" يعتبر "متغيراً غير أساسي" في الحل الحالي. ففي مثالنا يعتبر كل من x_1 , x_2 متغير غير أساسي في الحل الحالي.

والسؤال الآن. كيف نحكم فيما إذا كان الحل الحالي (وهو حل أساسي ممكن) هو حل أمثل أم لا ؟

للإجابة ، نُذّكر بأن الحل الأمثل هو حل أساسي ممكن يعطي أفضل قيمة لدالة الهدف. لذا يمكننا القول إن الحل الأمثل هو الحل الأساسي الممكن الحالي الذي لا يمكن أن نحسن بعده دالة الهدف. ولما كانت دالة الهدف الأصلية (قبل تحويلها إلى أحد القيود) هي [$Z = 200x_1 + 140x_2$] والتي كتبت جدولياً بالشكل [$Z-200x_1 - 140x_2 = 0$] فإن ظهور المعاملات السالبة 200 – و 140 – لـ x_1 و x_2 (على الترتيب) في جدول الحل الحالي يعني أن معاملات x_1 و x_2 في دالة الهدف الأصلية هي موجبة وبالتالي فإن أي زيادة (بالنسبة لبرامج التكبير) في x_1 أو x_2 سيزيد من دالة الهدف. وعندما ننتقل من جدول يمثل حلاً أساسياً ممكناً إلى جدول آخر يمثل حلاً أساسياً ممكناً تالياً للحل(مجاور من الناحية البيانية) للسابق فإن معاملات x_1 , x_2 في السطر الذي يمثل دالة الهدف Z ستتغير بشكل عام. وعندما نصل إلى الجدول الذي تظهر فيه معاملات x_1 و x_2 كأعداد موجبة فإن ذلك يعني ظهور هذه الأمثال كأمثال سالبة في دالة الهدف الأصلية ، وبالتالي فإن أي زيادة (بالنسبة لبرامج التكبير) في x_1 أو في x_2 لا يعطي أي زيادة في دالة الهدف ونكون عندها قد وصلنا إلى الحل الأمثل. ونخلص مما سبق إلى النتيجة التالية :

نتيجة (١,١)

إذا كان البرنامج الخطي هو برنامج تكبير (تصغير) فإن جدول الحل الحالي يعطي الحل الأمثل لذلك البرنامج إذا كانت جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف لهذا الجدول غير سالبة (غير موجبة).

ويطلق على النتيجة الأخيرة عادة اسم " شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس Optimality Condition of the Simplex method". وبموجب شرط الأمثلية هذا فإن الحل الحالي والمعطى بالجدول رقم (١,٢) ليس أمثلياً ، لذا نقوم بتطبيق الخطوات التالية من خوارزمية طريقة السمبلكس وهي اختيار "متغير داخل Entering Variable " و"متغير خارج Outgoing Variable" من الحل الحالي ومن ثم نحدد الحل الأساسي الممكن الجديد [الخطوات (١)، (٢) و(٣)] .وللوصول إلى الحل الأمثل بسرعة فإنه من المنطقي أن ندخل المتغير الذي سيعطي أفضل تحسين في دالة الهدف.

وبذلك تكون لدينا القاعدة التالية :

قاعدة (١,٢)

المتغير الداخل في برنامج تكبير (تصغير) خطي هو المتغير غير الأساسي الذي يملك أكبر معاملات سالبة بالقيمة المطلقة (اقل معاملات موجبة) في سطر دالة الهدف للحل الحالي.

كذلك فإنه من المنطقي أن يكون المتغير الخارج من الحل الأساسي الممكن الحالي هو ذلك المتغير الأساسي الذي يصل أولاً إلى القيمة صفر قبل أي متغير آخر وذلك عندما يصل المتغير الداخل (غير أساسي) إلى أكبر قيمة له عند الحل الأساسي الممكن التالي للحل الحالي . فلدينا في هذا الصدد القاعدة التالية :

قاعدة (١,٣)

المتغير الخارج من الحل الأساسي الممكن الحالي هو ذلك المتغير الأساسي الذي تقابله " أقل نسبة غير سالبة " والتي نحصل عليها من قسمة قيم المتغيرات الأساسية على المعاملات " الموجبة " المقابلة من عمود المتغير الداخل.

وكلمة "موجبة" في هذه القاعدة تعني أننا لا نعتبر المتغيرات الأساسية التي تقابلها معاملات سالبة للمتغير الداخل. وكذلك فإننا لا نعتبر المتغيرات الأساسية التي يقابلها معاملات صفرية للمتغير الداخل. ولإظهار المتغير الخارج فقد درجة العادة على كتابة النسبة المشار إليها سابقاً في عمود خاص معنون بكلمة "النسبة" يتم بعدها معرفة قيم المتغيرات الأساسية ومعرفة المتغير الداخل. ولذلك فإننا نعلّم عمود المتغير الداخل بعد معرفته ثم نملأ عمود النسبة لنحّدّد بعدها المتغير الخارج وفقاً للقاعدة (١،٢) ثم نعلّم بعدها سطر المتغير الخارج. ويطلق عادة على عمود المتغير الداخل اسم "العمود المحوري Pivot Column " كما يطلق على سطر المتغير الخارج اسم "السطر المحوري Pivot Row "وعلى الرقم الواقع في تقاطعهما (العنصر3 في جدول الحل الحالي) اسم" العنصر المحوري Pivot Element ". ولعل صفة " محوري " هنا ناتجة من أن السطر والعمود والعنصر التي أعطينا لكل منها هذه الصفة هي بالفعل محور الحسابات التي توصل إلى الحل الأساسي الممكن التالي للحل الحالي. وتتم عملية الوصول إلى هذا الحل ببناء جملة معادلات جديدة (جدول جديد) مكافئة لجملة المعادلات الحالية (الجدول الحالي) من خلال إجراء بعض العمليات الحسابية على الجدول الحالي. وبعد إحلال المتغير الداخل مكان المتغير الخارج فإن هذه العمليات تهدف إلى أمرين:

أولهما: جعل أمثال المتغير الأساسي الجديد (x_1 في المثال) مساوية 1 ويمكن الوصول إلى هذا الأمر بقسمة عناصر السطر المحوري الحالي(سطر S_1 في المثال) على العنصر المحوري الحالي ويطلق على السطر الناتج اسم " السطر المحوري الجديد New Pivot Row " وبذلك فإن:

$$\text{العنصر من السطر المحوري الجديد} = \frac{\text{العنصر المقابل من السطر المحوري الحالي}}{\text{العنصر المحوري}} \qquad (١،٢٧)$$

ويوضح الجدول رقم(١,٣) السطر المحوري الجديد x_1 بعد أن أحللنا المتغير الداخل x_1 مكان المتغير الخارج S_1 وبعد أن أجرينا العملية على السطر المحوري الحالي S_1 . ولا يهمنا في هذه المرحلة ما هو موجود في عمود النسبة لأننا لم نصل بعد إلى كامل الجدول الذي يمثل جملة معادلات مكافئة للجملة الحالية .

ثانيهما : جعل معاملات المتغير الأساسي الجديد (x_1 في المثال) في بقية الأسطر (أي جميع السطور عدا السطر المحوري الجديد) مساوية للصفر ويمكن الوصول لذلك باستخدام الصيغة التالية : العنصر من السطر الجديد =

[العنصر المقابل من السطر القديم] – [العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي]× [العنصر المقابل من السطر المحوري الجديد] (١,٢٨)

الجدول رقم (١,٣). السطر المحوري الجديد

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z									
x_1	0	1	0	1/ 3	0	0	0	2000	السطر المحوري الجديد ←
S_2									
S_3									
S_4									

وكذلك تتم حسابات بقية الأسطر الجديدة بطرق مماثلة. فبأخذ السطر الثالث (سطر S_2) من الحل الحالي (الجدول رقم ١,٣) نجد أن حساب السطر الثالث الجديد يتم كما يلي :

ويوضح الجدول رقم(١,٣) السطر المحوري الجديد x_1 بعد أن أحللنا المتغير الداخل x_1 مكان المتغير الخارج S_1 وبعد أن أجرينا العملية على السطر المحوري الحالي S_1 . ولا يهمنا في هذه المرحلة ما هو موجود في عمود النسبة لأننا لم نصل بعد إلى كامل الجدول الذي يمثل جملة معادلات مكافئة للجملة الحالية .

ثانيهما : جعل معاملات المتغير الأساسي الجديد (x_1 في المثال) في بقية الأسطر (أي جميع السطور عدا السطر المحوري الجديد) مساوية للصفر ويمكن الوصول لذلك باستخدام الصيغة التالية : العنصر من السطر الجديد =

[العنصر المقابل من السطر القديم] – [العنصر المقابل من العمود المحوري (١,٢٨)
الحالي]× [العنصر المقابل من السطر المحوري الجديد]

الجدول رقم (١,٣). السطر المحوري الجديد

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z									
x_1	0	1	0	1/ 3	0	0	0	2000	السطر المحوري الجديد ←
S_2									
S_3									
S_4									

وكذلك تتم حسابات بقية الأسطر الجديدة بطرق مماثلة. فبأخذ السطر الثالث (سطر S_2) من الحل الحالي (الجدول رقم ١,٣) نجد أن حساب السطر الثالث الجديد يتم كما يلي :

سطر S_2 القديم الحالي $[0 \quad 2.9 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8000]$

(العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي) $- \; 0 \times [1 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

× (السطر المحوري الجديد)

سطر S_2 الجديد $= [0 \quad 2.9 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 8000]$

كذلك يكون لدينا (الحسابات المتعلقة ببقية الأسطر)

سطر Z القديم (الحالي) $[-200 \quad -140 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

– (العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي)

× (السطر المحوري الجديد) $-(2000) \; [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر Z الجديد $= [0 \quad -140 \quad \frac{200}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 40000]$

سطر S_3 القديم (الحالي) $[2.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 7500]$

(العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي)

× (السطر المحوري الجديد) $-(2.5) \; [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر S_3 الجديد $= [0 \quad 2 \quad \frac{-2.5}{3} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 2500]$

سطر S_4 القديم (الحالي) $[1.3 \quad 1.5 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5000]$

(العنصر المقابل من العمود المحوري الحالي)

× (السطر المحوري الجديد) $-(1.3) \; [1 \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 2000]$

سطر S_4 الجديد $= [0 \quad 1.5 \quad \frac{-1.3}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2400]$

ونحصل بذلك على النتائج التالية (الجدول رقم ١,٤).

ومما تجد ملاحظته في هذا الجدول أن معاملات المتغير الداخل x_1 في عمود x_2 أصبحت جميعها أصفاراً ما عدا تلك المقابلة للسطر الذي يبدأ بـ x_1 حيث أصبحت 1 وهو ما كنا نرغب بتحقيقه. والجدول رقم (١,٤) يمثل حلاً أساسياً ممكناً مجاوراً للحل الابتدائي السابق المتمثل بالنقطة(O(0.0 والمتغيرات الأساسية في هذا الحل هي S_4 ، S_3 ، S_2 ، x_1 وقيمتها 2400 ، 2500 ، 8000 و 2000 على الترتيب. أما المتغيرات غير الأساسية وهي x_2 وS_1 فقيمها أصفاراً.

نلاحظ أيضاً أن قيمة Z قد ارتفعت من الصفر إلى 400000.

ونلاحظ من الجدول رقم (١,٤) أن المعاملات المقابلة لـ x_2 سالبة وهذا يعني أنه مازال بإمكاننا تحسين الحل الحالي المتمثل بهذا الجدول، ويعني كذلك أن المتغير الداخل هو x_2. نقوم لذلك بتعليم عمود x_2 واعتباره العمود المحوري. نحدد الآن المتغير الخارج وفقاً للقاعدة (١,٢) فنجد أنه S_3 ؛ لأنه يقابل أقل نسبة موجبة.

الجدول رقم (١,٤). حل أساسي ممكن مجاور للحل الابتدائي مثال (١,١) [التكرار(١)]

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات (متغير داخل) ↓							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	X_1	X_2	S_2	S_1	S_3	S_4		
Z	1	0	-140	3/200	0	0	0	400000	عمود النسبة
X_1	0	1	0	1/3	0	0	0	2000	
S_1	0	0	2.9	0	1	0	0	8000	$\frac{5000}{2.9} = 2753.6$
$\rightarrow S_3$ (متغير خارج)	0	0	2	-2.5/3	0	1	0	2500	$\frac{2500}{2} = 1250$
S_4	0	0	1.5	-1.3/3	0	0	1	2400	$\frac{2400}{1.5} = 1600$

نعلّم بعدها سطر S_3 فيكون العنصر المحوري هو 2 . وقبل الانتقال إلى الحل التالي يجب أن نلاحظ أن قيمة Z قد ارتفعت من 400000 إلى 575000 .ونحصل بذلك على الجدول (٥,١) التالي . وبما أنه لا يوجد أمثال سالبة مقابل المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف Z فوفقاً للنتيجة (١,١) فإن الجدول رقم (١,٥) يمثل حلاً أمثلاً قيم متغيراته الأساسية هي :

$$S_4 = 525 \text{ و } S_2 = 4375 \ ، \ x_2 = 1250 \ ، \ x_1 = 2000$$

ومتغيراته غير الأساسية هي : $S_3 = 0$ و $S_1 = 0$.

كما هو ملاحظ من الجداول (١,٣) ، (١,٤) و (١,٥) والتي تمثل الحلول الممكنة المتتالية التي قادت إلى الحل الأمثل فإن *معاملات أي من المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف Z لهذه الجداول تساوي الصفر* . وهذا الأمر صحيح دوماً ؛ لأن المتغيرات الأساسية في الحل الابتدائي هي المتغيرات الراكدة وعند خروج أحد هذه المتغيرات ليصبح غير أساسي ودخول متغير غير أساسي مكانه ليصبح أساسيا فإن معامل المتغير الداخل ستصبح صفراً بعد أن أصبح هذا الأخير أساسياً وهكذا يتكرر الأمر في الجداول اللاحقة . *وأخيرا تجدر الإشارة إلى أن خوارزمية طريقة السمبلكس المشروحة في الفقرة(١,٥,٣) السابقة تصلح أيضا للبرامج الخطية التي يكون فيها الهدف تصغير شريطة تحقق الشروط من(٢) إلى(٤) الواردة في(١,٥,١) السابقة.*

الجدول رقم (١,٥). جدول الحل الأمثل مثال (١,١) [التكرار (٢)]

متغيرات أساسية	أمثال المتغيرات							الأطراف اليمنى (الحل)	
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4		
Z	1	0	0	3/25	0	70	0	57000	عمود النسبة
X_1	0	1	0	1/3	0	0	0	2000	
S_2	0	0	0	6/7.25	1	2/-2.9	0	4375	
X_2	0	0	1	6/-2.5	0	1/2	0	1250	
S_4	0	0	0	6/1.15	0	2/-1.5	1	525	

(١,٥,٤) ملاءمة طريقة السمبلكس لجميع البرامج الخطية (طريقة المرحلتين)

تعرفنا في الفقرة الجزئية السابقة على كيفية تطبيق خوارزمية طريقة السمبلكس لحل برنامج تكبير (تصغير) خطي جميع قيوده (عدا قيود اللاسلبية) من النوع $\leq$ وجميع الأطراف اليمنى لهذه القيود موجبة . وللحل بهذه الطريقة نبدأ أولاً بكتابة البرنامج الخطي بصورته القياسية ونحصل على الحل الابتدائي (وهو حل أساسي ممكن لهذا النوع من البرامج) بعدئذ بإعطاء قيم متغيرات القرار الأصلية في البرنامج القيمة صفر حيث تمثل قيم المتغيرات الراكدة الناتجة عندئذ قيمة هذا الحل الابتدائي. ولكننا لا نحصل على مثل هذا الحل الابتدائي عندما لا يتصف برنامج التكبير أو التصغير الخطي بالصفة المشار إليها آنفاً . أي عندما تكون جميع الأطراف اليمنى للقيود موجبة مع وجود قيود على شكل مساواة و/أو مع وجود قيود من النوع $\geq$. ولتوضيح ذلك نسوق المثال التالي :

مثال (١,٤)

تعاقدت شركة للصناعات الكيميائية على إنتاج 1000 كيلوغرام (بالضبط) في الأسبوع من مادة كيميائية C. يتم إنتاج المادة C بمزج ثلاث مكونات كيميائية C_3 ، C_2 ، C_1 تكلفة الكيلوغرام لها هي 7 ، 6 ، 5 ريالاً على الترتيب وتخضع صناعة المادة C للشروط التالية :

١ – لا يمكن استخدام أكثر من 300 كيلوغرام من المادة C_1 في المزيج.

٢- لا يمكن استخدام أقل من 150 كيلوغرام من المادة C_2 في المزيج.

٣- لا يمكن استخدام أقل من 200 كيلوغرام من المادة C_3 في المزيج.

ترغب الشركة في جعل تكلفة المزيج (تكلفة الإنتاج الأسبوعية) أقل ما يمكن. ما هي الطريقة المثلى لمزج المكونات C_3، C_2، C_1 والتي تحقق أهداف الشركة وما هي أقل تكلفة إنتاج أسبوعية ممكنة عندئذ؟.

الحل

إذا رمزنا بـ x_3 ، x_2 ، x_1 لعدد الوحدات (بالكيلوغرام) في الأسبوع والمستخدمة في المزيج من المكونات C_3، C_2، C_1 على الترتيب ورمزنا بـ Z لتكلفة الإنتاج الأسبوعية فمن الواضح عندئذ أن النموذج الرياضي للمسألة هو على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \qquad (١,٢٩)$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \le 300$$

$$x_2 \ge 150$$

$$x_3 \ge 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

وبإضافة المتغيرات الراكدة والفائضة لقيود هذا البرنامج نحصل على البرنامج التالي:
صغر الدالة:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \tag{١,٣٠}$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \quad + S_1 = 300$$

$$x_2 \quad - S_2 = 150$$

$$x_3 \quad - S_3 = 200$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

وكما هو ملاحظ فإن القيود في النموذج(١,٣٠) عبارة عن أربع معادلات بستة متغيرات(غير معلومة). وإذا أردنا أن نبدأ بنقطة الأصل كحل ابتدائي كما هو الحال في المثال السابق فعلينا أن نعطي كل من متغيرات القرار الأصلية في المثال وهي x_3، x_2، x_1 القيمة صفر في هذه القيود وعندها سيؤدي القيد الأول إلى النتيجة $1000 = 0$ وهي تناقض. وكما سبق وأوضحنا فإن أي حل لجملة المعادلات الأربع السابقة يجب أن يُعطى بدلالة أربعة من المتغيرات الستة S_3 ، S_2 ، S_1 ؛ x_3 ، x_2 ، x_1 لا بثلاثة ويعني ذلك أننا لن نحصل على نقطة الأصل كحل ابتدائي. هب الآن أننا سنقبل بغير نقطة الأصل كحل ابتدائي ولنعطي إذاً أي اثنين من المتغيرات الستة القيمة صفر. مثلاً $x_1 = x_2 = 0$ فنحصل على الحل التالي:

$S_1 = 300$ و $S_2 = -150$ ، $x_3 = 1000$ ، $S_3 = 800$

وهو حل أساسي غير ممكن. ويمكننا أن نتحقق أن إعطاء أي زوج من المتغيرات الستة السابقة القيمة صفر قد يقود إلى حل أساسي غير ممكن أو إلى تناقض. فمثلاً $x_1 = S_1 = 0$ لا يعطي حلاً أساسياً ممكناً (هنا علينا أن نحل عندئذ $\binom{6}{2} = 15$ جملة من المعادلات كل منها بأربعة متغيرات). هب من جهة ثانية، أن إعطاء بعض الأزواج الخمس عشرة المشار إليها آنفاً القيمة صفر يؤدي إلى حل ابتدائي ممكن فعلينا إذاً أن نجرب جميع هذه الأزواج حتى نحصل على مثل هذا الحل. ونظراً لأن الحل بخوارزمية طريقة السمبلكس يتم بوساطة الكمبيوتر فإن طريقة تجريب جميع الأزواج هذه لا تتناسب مع الكمبيوتر؛ لأنها تضاعف كثيراً من حجم الحسابات اللازمة للوصول إلى الحل الأمثل وخاصة عندما يكون عدد القيود كبيراً نسبياً. وما يهمنا في الحقيقة هو إضافة بعض المتغيرات غير السالبة إلى الأطراف اليسرى لبعض أو كل القيود والتي من شأنها أن توصل إلى حل ابتدائي(أساسي) ممكن. وبعبارة أخرى فإننا نأمل من مثل هذه الإضافة أن تلعب المتغيرات المضافة دور المتغيرات الراكدة التي نضيفها عادة للقيود من النوع $\leq$. ولذلك فإننا نضيف متغيرات غير سالبة للقيود التي كانت أصلاً على شكل مساواة أو على شكل متباينة من النوع $\geq$ فقط . فإذا أجرينا مثل هذه الإضافة على قيود النموذج (١,٣٠) عدا الثاني منها لأصبح برنامجنا بشكله القياسي الجديد كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 \qquad (١,٣١)$$

وفقاً للقيود :

$$
\begin{array}{llllllll}
x_1+x_2+x_3 & & & & +a_1 & & & = 1000 \\
x_1 & +S_1 & & & & & & = 300 \\
x_2 & & -S_2 & & & +a_2 & & = 150 \\
x_3 & & & -S_3 & & & +a_3 & = 200 \\
\end{array}
$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0$$

ونطلق على مثل النموذج (١,٣١) "اسم المسألة المعدلة Modified Problem "، وعلى الشكل الذي كتب به هذا النموذج اسم"الشكل القياسي Standard Form ".

وخلافاً لما رأيناه بالنسبة للمتغيرات الراكدة أو الفائضة من أنها تمثل موارد غير مستهلكة أو موارد فائضة فإنه لا يوجد للمتغيرات a_1 ، a_2 و a_3 أي معنى فيزيائي مماثل وتسمى لذلك "متغيرات زائفة أو اصطناعية Artificial Variables ". وبالطبع فإن إضافة مثل هذه المتغيرات سيوسع من فضاء الحل الممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فإن أي حل ممكن للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣١) هو أيضاً حل ممكن لها تحت قيود النموذج (١,٣٠) فيما لو جعلنا جميع قيم المتغيرات الزائفة في هذا الحل أصفارا. وعندئذ يكون الحل الأمثل للمسألة تحت قيود النموذج(١,٣١) أيضاً حل أمثل للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣٠)، ومع ذلك فإن الحل الأمثل للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣١) قد لا يكون حلاً ممكناً للمسألة تحت قيود النموذج (١,٣٠) إذا لم نضمن وصول جميع المتغيرات الزائفة إلى الصفر في هذا الحل والذي عادة ما يتم من خلال إعطاء هذه المتغيرات معاملات كبيرة جدا تمنع وصولها إلى الحل الأمثل. وقد اقترحت لذلك طريقة أطلق عليها " طريقة المرحلتين Two Phase Method " وتقوم فلسفة هذه الأخيرة على ما يلي :

بما أن معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف تصبح مهملة بالمقارنة مع معاملات المتغيرات الزائفة الكبيرة. ولما كنا نهدف إلى جعل معاملات كل من المتغيرات الزائفة مساوية للصفر في الحل الأمثل النهائي لئلاّ يكون لهذه المتغيرات أي أثر في ذلك

الحل فإنه يمكننا أن نبدأ أولاً بالبحث ضمن فضاء الحل "للمسألة المعدلة" عن قيم المتغيرات في هذه المسألة والتي تجعل مجموع المتغيرات الزائفة أصغر ما يمكن (أي المجموع يساوي الصفر) وذلك باتباع طريقة السمبلكس ونطلق على هذا العمل اسم "المرحلة الأولى (Phase(1)) ". ويبدأ العمل في "المرحلة الثانية (Phase(2)) " باعتبار الحل الذي توصلنا إليه في المرحلة الأولى (الحل الذي يجعل مجموع المتغيرات الزائفة أصغر ما يمكن) كحل ابتدائي ننطلق منه في المرحلة الثانية لإيجاد الحل الأمثل "للمسألة الأصلية" وباتباع طريقة السمبلكس أيضاً. ونؤكد ثانية أن قيم جميع المتغيرات الزائفة في الحل الأمثل للمرحلة الأولى(الحل الابتدائي للمرحلة الثانية) يجب أن تكون مساوية للصفر بالضرورة لكي يكون هذا الحل حلاً ممكناً للمسألة الأصلية ويمكننا بالتالي أن ننطلق منه في المرحلة الثانية. وسنوضح فيما يلي خطوات الحل بهذه الطريقة من خلال حل مثال (١,٤) السابق الذكر بطريقة المرحلتين المشار إليها سابقاً.

حل مثال (١,٤) بطريقة المرحلتين

المرحلة الأولى

صغر الدالة :

$$A = a_1 + a_2 + a_3 \qquad (1,32)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{lllllllll}
x_1+x_2+x_3 & & & +a_1 & & & = & 1000 \\
x_1 & +S_1 & & & & & = & 300 \\
x_2 & & -S_2 & & +a_2 & & = & 150 \\
x_3 & & & -S_3 & & +a_3 & = & 200
\end{array}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0$$

للأسباب التي أوضحنا سابقاً بعدم السماح للمتغيرات الزائفة (كمتغيرات أساسية) أن تظهر بمعاملات موجبة في دالة الهدف A فإننا نقوم بجعل معاملات هذه المتغيرات أصفاراً على النحو التالي . نجعل دالة الهدف كأحد القيود ثم نجمعها للقيود التي تحوي متغيرات زائفة كما يلي :

$$\begin{array}{l} A + 0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 - a_1 - a_2 - a_3 = 0 \\ 1\,(\,x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad\qquad + a_1 \qquad = 1000\,) \\ 1\,(\qquad x_2 \qquad\qquad - S_2 \qquad\qquad + a_2 \qquad = 150\,) \\ 1\,(\qquad\qquad x_3 \qquad\qquad - S_3 \qquad\qquad + a_3 = 200\,) \\ \hline A + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0.S_1 - S_2 - S_3 + 0.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3 = 1350 \end{array}$$

لاحظ أن المتغيرات الزائفة في السطر الأخير قد ظهرت بمعاملات صفرية وبذلك يصبح البرنامج (١,٣٢) مكافئاً للبرنامج التالي :

صغّر الدالة A :

$$A + x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0.S_1 - S_2 - S_3 + 0.a_1 + 0.a_2 + 0.a_3 = 1350 \qquad (١,٣٣)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{llllllll} x_1+x_2+x_3 & & & & + a_1 & & & = 1000 \\ x_1 & + S_1 & & & & & & = 300 \\ x_2 & & - S_2 & & & + a_2 & & = 150 \\ x_3 & & & - S_3 & & & + a_3 & = 200 \end{array}$$

$$x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 , a_1 , a_2 , a_3 \geq 0$$

ويمكننا أن نتحقق من أن جداول الحلول المتتابعة والحل الأمثل للنموذج (١,٣٣) (أي للمرحلة الأولى) معطاة كما في الجدول رقم (١,٦) اللاحق.

الجدول رقم (١،٦). الحلول المتتابعة والحل الأمثل للمرحلة الأولى لمثال (١،٤).

التكرار	متغيرات أساسية	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	a_1	a_2	a_3	الحل	
0	**A**	**1**	**2**	**2**	**0**	**−1**	**−1**	**0**	**0**	**0**	**1350**	**النسبة**
	a_1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1000	1000
	S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	a_2	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	0	1	0	150	150
	a_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
1	**A**	0	0	2	0	0	-1	0	-2	0	1050	
	a_1	1	0	1	0	1	0	1	-1	0	850	850
	S_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	a_3	0	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	0	0	1	200	200
2	**A**	1	0	0	0	1	1	0	-2	-2	650	
	a_1	1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	650	650
	S_1	$\boxed{1}$	0	0	1	0	0	0	0	0	300	300
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
3	**A**	0	0	0	-1	1	1	0	-2	-2	350	
	a_1	0	0	0	-1	$\boxed{1}$	1	1	-1	-1	350	350
	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	0	-1	0	0	1	0	150	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	
4	**A**	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	0	
حل أمثل (ابتدائي) للمرحلة الأولى (الثانية)	S_2	0	0	0	-1	1	1	1	-1	-1	350	
	x_1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	300	
	x_2	0	1	0	-1	0	1	1	0	-1	500	
	x_3	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	200	

المرحلة الثانية

تبدأ المرحلة الثانية بأحد الحلول المثلى (في حال وجود أكثر من حل) التي وصلنا إليها في نهاية المرحلة الأولى واعتبار هذا الحل كحل ابتدائي للمرحلة الثانية، إلا أننا نسقط من اعتبارنا جميع المتغيرات الزائفة بعد أن أدت دورها في إيجاد حل ابتدائي للمرحلة الثانية وكانت جميع قيمها أصفاراً في هذا الحل.

فلو أخذنا الحل الأمثل للمرحلة الأولى (الجدول رقم ١,٦) كحل ابتدائي للمرحلة الثانية وأسقطنا منه المتغيرات الزائفة لكان علينا أن نحل المسألة التالية للمرحلة الثانية.

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 \qquad (١,٣٤)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & -S_1 & +S_2 & +S_3 & = 350 \\
x_1 & & & +S_1 & & & = 300 \\
 & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & = 500 \\
 & & x_3 & & & -S_3 & = 200 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0}
\end{array} \qquad (١,٣٥)$$

والدالة (١,٣٤) هي دالة الهدف نفسها للمسألة الأصلية(١,٣٠). أما القيود (١,٣٥) فهي مكافئة تماماً لقيود المسألة الأصلية (١,٣٠). ولو أعدنا كتابة المسألة الأخيرة بحيث تظهر دالة الهدف كما لو أنها أحد القيود لظهرت المتغيرات x_3 ، x_2 ، x_1 وهي أساسية في الجدول رقم (١,٦) بمعاملات سالبة مما يتعذر معه متابعة الحل بطريقة السمبلكس (نذكر بأن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف لأي حل أساسي ممكن يجب أن تكون مساوية للصفر حسبما أوضحنا سابقاً. وبإتباع طريقة مماثلة لتلك التي أجريناها في (١,٣٣) على البرنامج الأخير نجد ما يلي :

المرحلة الثانية

تبدأ المرحلة الثانية بأحد الحلول المثلى (في حال وجود أكثر من حل) التي وصلنا إليها في نهاية المرحلة الأولى واعتبار هذا الحل كحل ابتدائي للمرحلة الثانية، إلا أننا نسقط من اعتبارنا جميع المتغيرات الزائفة بعد أن أدت دورها في إيجاد حل ابتدائي للمرحلة الثانية وكانت جميع قيمها أصفاراً في هذا الحل.

فلو أخذنا الحل الأمثل للمرحلة الأولى (الجدول رقم ١,٦) كحل ابتدائي للمرحلة الثانية وأسقطنا منه المتغيرات الزائفة لكان علينا أن نحل المسألة التالية للمرحلة الثانية.

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 \qquad (١,٣٤)$$

وفقاً للقيود :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & -S_1 & +S_2 & +S_3 & = 350 \\
x_1 & & & +S_1 & & & = 300 \\
 & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & = 500 \\
 & & x_3 & & & -S_3 & = 200 \\
\multicolumn{7}{c}{x_1 , x_2 , x_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0}
\end{array} \qquad (١,٣٥)$$

والدالة (١,٣٤) هي دالة الهدف نفسها للمسألة الأصلية(١,٣٠). أما القيود (١,٣٥) فهي مكافئة تماماً لقيود المسألة الأصلية (١,٣٠). ولو أعدنا كتابة المسألة الأخيرة بحيث تظهر دالة الهدف كما لو أنها أحد القيود لظهرت المتغيرات x_3 ، x_2 ، x_1 وهي أساسية في الجدول رقم (١,٦) بمعاملات سالبة مما يتعذر معه متابعة الحل بطريقة السمبلكس (نذكر بأن جميع معاملات المتغيرات الأساسية في سطر دالة الهدف لأي حل أساسي ممكن يجب أن تكون مساوية للصفر حسبما أوضحنا سابقاً. وبإتباع طريقة مماثلة لتلك التي أجريناها في (١,٣٣) على البرنامج الأخير نجد ما يلي :

$$\begin{array}{lccccccr} Z & -5x_1 & -6x_2 & -7x_3 & +0.S_1 & +0.S_2 & +0.S_3 & =0 \\ 5\,(& x_1 & & & +S_1 & & & =300) \\ 6\,(& & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & =500) \\ 7\,(& & & x_3 & & & -S_3 & =200) \\ \hline Z & +0.x_1 & +0.x_2 & +0.x_3 & -S_1 & +S_2 & -S_3 & =5900 \end{array} \quad (1,36)$$

وبالتالي فإن البرنامج الأخير يصبح مكافئاً للبرنامج التالي.

صغر الدالة Z وفقاً للقيود

$$\begin{array}{lcccccccr} Z & +0.x_1 & +0.x_2 & +0.x_3 & -S_1 & +S_2 & -S_3 & =5900 \\ & & & & -S_1 & +S_2 & +S_3 & =350 \\ & x_1 & & & +S_1 & & & =300 \\ & & x_2 & & -S_1 & & +S_3 & =500 \\ & & & x_3 & & & -S_3 & =200 \end{array}$$

$$x_1\,,\,x_2\,,\,x_3\,,\,S_1\,,\,S_2\,,\,S_3 \geq 0$$

وجدول الحل الابتدائي لهذا البرنامج الأخير معطى كما في الجدول رقم (١,٧) التالي. ولما كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 في هذا الحل غير موجبة فإن الجدول رقم (١,٧) يمثل أيضاً الحل الأمثل للمرحلة الثانية.

الجدول رقم (١,٧).حل ابتدائي وأمثل للمرحلة الثانية لمثال (١,٤)

التكرار	متغيرات أساسية	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
0	Z	0	0	0	-1	0	-1	5900	النسبة
حل ابتدائي	S_2	0	0	0	-1	1	1	350	
(أمثل)	x_1	1	0	0	1	0	0	300	
للمرحلة	x_2	0	1	0	0	-1	1	500	
الثانية (الأولى)	x_3	0	0	1	0	0	0	200	

الآن سنسجل الملاحظات التالية :

ملاحظة (١,٢)

(أ) نلاحظ في التكرار الأخير من الجدول رقم(١,٦)(وهو الحل الأمثل للمرحلة الأولى) أن المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 تظهر في سطر دالة الهدف بمعاملات صفرية. ويعني ذلك أن دخول أي من المتغيرين S_3 ، S_1 في حل تالي لن يكون له أي أثر على قيمة A المثلى ونحصل بالتالي على حل أمثل مضاعف أو متعدد. وما رأيناه في هذا المثال صحيح بشكل عام ونلخصه بالقاعدة التالية.

قاعدة (١,٣)

أ) إذا كانت معاملات واحد أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف للحل الأمثل مساوية للصفر فيوجد عندئذ" حل أمثل متعدد Multiple Optimal- Solution"

ب) كذلك بالعودة إلى الجدول رقم (١,٦) التكرار (2) نلاحظ أن المتغيرات غير الأساسية S_3 ، S_1 و x_1 قد ظهرت في سطر دالة الهدف A بمعاملات (موجبة) متساوية ولذلك فإن أياً من هذه المتغيرات مرشح للدخول كمتغير أساسي في الحل التالي. ويشار لمثل هذه الحالة عادة إسم "حالة تعادل في المتغيرات الداخلة Tie for the entering variables".

ج) إذا تساوت قيمتين فأكثر من القيم الناتجة في عمود النسبة فهذا يعني أن جميع المتغيرات المقابلة لهذه القيم تكون مرشحة لأن تكون متغيرات خارجة ، ويمكننا عندئذ اختيار أياً منها كمتغير خارج. ونطلق على مثل هذه الحالة إسم " حالة تعادل في المتغيرات الخارجة Tie for the outgoing variables".

ملاحظة (١,٣)

(أ) العلاقة بين الحل الأمثل للمسألة الثنوية والحل الأمثل للمسألة الأولية

وجدنا أن النموذج (١,١٨) هو النموذج الثنوي للنموذج الأولي في المثال (١,١)، وقد ذكرنا في ملاحظة (١,١) أن القيم المثلى لمتغيرات المسألة الثنوية تساوي ما

أسميناه سعر الظل للوحدة المضافة في القيود المقابلة لهذه المتغيرات. وكذلك فقد نصت نظرية الثنوية على أنه يمكن إيجاد الحل الأمثل لأي من المسألتين الأولية والثنوية من جدول الحل الأمثل للأخرى. وتصح في هذا الصدد القاعدة التالية :

قاعدة (١,٤)

إذا كانت قيود *المسألة الأولية(الثنوية) من الشكل* ≤ فإن *القيم المثلى لمتغيرات المسألة الثنوية(الأولية) هي القيم المقابلة للمتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية(الثنوية).*

فلو عدنا مثلاً للجدول رقم (١,٥) والذي يمثل الحل الأمثل لمسألة المثال(١,١) وجميع قيودها من الشكل ≤ فقد وجدنا أن المسألة الثنوية لها هي تلك المعطاة بالنموذج (١,١٨) والقيم المثلى للمتغيرات y_1, y_2 , y_3 وy_4 هي تلك الموجودة تحت المتغيرات غير الأساسية S_1, S_2 , S_3 وS_4 في سطر دالة الهدف من جدول الحل الأمثل(١,٥) أي أنها تساوي 3/25 ، 0 ، 70 ، 0 على الترتيب وهو ما سبق ووجدناه (ملاحظة(١,١)). ولكن لو عدنا إلى النموذج (١,٣٠) لمثال(١,٣) وهو:

صغر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

وفقاً للقيود :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 \qquad \leq 300$$

$$x_2 \qquad \geq 150$$

$$x_3 \geq 200$$

$$x_1, x_2, x_3 \qquad \geq 0$$

فإن النموذج الثنوي له هو :

كبر الدالة :

$$W = 1000y_1 + 300y_2 + 150y_3 + 200y_4 \qquad (١,٣٧)$$

وفقاً للقيود :

$$y_1 + y_2 + 0.y_3 + 0.y_4 \leq 5$$

$$y_1 + 0.y_2 + y_3 + 0.y_4 \leq 6$$

$$y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 + y_4 \leq 7$$

y_1 غير مقيد بإشارة

$$y_2 \leq 0$$

$$y_3, y_4 \geq 0$$

فإننا لا نستطيع أن نوجد القيم المثلى لمتغيرات النموذج الثنوي (١,٣٧) مباشرة من الجدول رقم (١,٧) والذي يمثل الحل الأمثل للنموذج الأولي (١,٢٩) لأن هذا النموذج

غير مكتوب بالشكل النموذجي الذي أشرنا إليه في نهاية الملاحظة (١,١). وفي الحقيقة فإن القيم المثلى للمتغيرات y_4, y_3, y_2, y_1 وهي 6,-1,0,1 على الترتيب.لاحظ أن قيمة W عند هذه القيم تساوي 59000 وهي نفس قيمة Z المثلى في الجدول رقم (١,٧) السابق.

(ب) العلاقة بين قيم حلول المسألة الثنوية وقيم حلول المسألة الأولية

لنفرض أن المسألة الأولية هي مسألة تكبير دالة هدفها Z وأن X^* هو حلها الأمثل عندئذ تكون المسألة الثنوية لها هي مسألة تصغير ، لنفرض أن دالة هدفها هي W وأن حلها الأمثل هو Y^*. فإذا كان X ، Y حلين اختياريين للمسألة الأولية والثنوية على الترتيب كان لدينا ما يلي

$$Z(X) \leq Z(X^*) = W(Y^*) \qquad (١,٣٨)$$

$$W(Y) \geq W(Y^*) = Z(X^*) \qquad (١,٣٩)$$

(نذكر أنه بموجب نظرية الثنوية فإن $Z(X^*) = W(Y^*) = b$) وتعني العلاقتان (١,٣٨) و(١,٣٩) أن القيمة المثلى للحل في المسألة الثنوية (الأولية) تشكل حداً أعلى(حداً أدنى) لكافة حلول المسألة الأولية (الثنوية). ويعني ذلك أن أي حل Y يكون فيه $Z(X^*) = b > W(Y)$ هو حل غير ممكن للمسألة الثنوية. وأن أي حل X يكون فيه $W(Y^*) = b < Z(X)$ هو حل غير ممكن للمسألة الأولية. ويقودنا ذلك إلى النتيجة الهامة التالية :

نتيجة (١,٢)

لو رمزنا بالرمز b للقيمة المثلى للحل للمسألتين الأولية والثنوية فعندئذ

(أ) جميع الحلول الممكنة للمسألة الأولية التي تملك حلولاً أقل من b يقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الثنوية.

(ب) جميع الحلول الممكنة للمسألة الثنوية التي تملك حلولاً أكبر من b يقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الأولية.

(ج) لدى حل المسألة الأولية (الثنوية) فإن الحلول الممكنة والمتتابعة لها تقابلها حلولاً غير ممكنة للمسألة الثنوية(الأولية) حتى نصل إلى الحل الأمثل فيقابله عندئذ أول حل ممكن للمسألة الثنوية (الأولية) .

(١,٦) طريقة السمبلكس الثنوية
The Dual Simplex Method

كما لاحظنا سابقاً ، فإن الحل بطريقة السمبلكس يستوجب كتابة النموذج بالشكل القياسي وذلك باستخدام متغيرات إضافية(راكدة ، فائضة وزائفة) وبجعل الأطراف اليمنى لجميع القيود موجبة ومن ثم إيجاد حل ابتدائي أساسي ممكن للمسألة الأولية أو الثنوية التي نحلها. وكما وجدنا سابقاً فإن الوصول إلى مثل هذا الحل الابتدائي الأساسي الممكن قد يكون مباشرة (مرحلة واحدة) إذا كان النموذج قيد الحل من النوع النموذجي كما هي الحال في مثال (١,١) ، وقد يكون باستخدام طريقة المرحلتين حيث نقوم في المرحلة الأولى بإيجاد سلسلة من الحلول الممكنة لمسألة هذه المرحلة (وهي بالتالي غير ممكنة بالنسبة لثنويتها حسب النتيجة (١,٢)) لحين الوصول إلى الحل الأمثل لمسألة هذه المرحلة (وهو بالتالي حل ممكن لثنويتها حسب النتيجة (١,١)) والذي يكون حلاً ابتدائياً أساسياً ممكناً للمسألة الأصلية ننطلق منه لإيجاد الحل الأمثل لهذه الأخيرة.

لكن ما يعرف ب" *طريقة السمبلكس الثنوية* " لا تشترط الانطلاق من حل ابتدائي أساسي ممكن. فبالاستناد إلى النتيجة (١,٢) قد يكون أسهل علينا الانطلاق من حل أساسي يحقق شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف (وبالتالي فإن هذا الحل يعطي حلاً ممكناً للمسألة الثنوية) ولكنه حل غير ممكن للمسألة الأولية ؛ وذلك لأن بعض قيم المتغيرات الأساسية هي قيم سالبة في هذا الحل.

وتعتمد طريقة السمبلكس الثنوية على الانطلاق من مثل هذا الحل (غير الممكن ولكنه يحقق شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف) والتحرك منه عبر سلسلة من الحلول باتجاه حل ممكن شريطة أن نحافظ أثناء حركتنا هذه على شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف للمسألة المدروسة ، فيكون هذا الحل عندئذ حلاً أمثليا ؛ لأنه ممكن ويحقق شرط الأمثلية.

وتعمل طريقة السمبلكس الثنوية بأسلوب مشابه لذلك التي تعمل به طريقة السمبلكس، ولكن قواعد اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج وشرط الأمثلية لهذه الطريقة تصبح على النحو التالي

(١,٦,١) شرط الأمثلية لطريقة السمبلكس الثنوية

جميع الأطراف اليمنى للقيود غير سالبة وشرط الأمثلية في سطر دالة الهدف للمسألة المدروسة محققاً.

(١,٦,٢) تحديد المتغير الخارج لطريقة السمبلكس الثنوية

إذا كان الطرف الأيمن لواحد على الأقل من القيود سالباً(تهمل القيود التي تكون أطرافها اليمنى موجبة) فإن المتغير الخارج هو ذلك المتغير الذي يملك أقل قيمة سالبة وعندها نعتبر أن سطر ذلك المتغير هو السطر المحوري. وفي حالة التعادل بين أكثر من متغير فإننا نختار أحدها.

(١,٦,٣) تحديد المتغير الداخل لطريقة السمبلكس الثنوية

بعد تحديد السطر المحوري ، نقوم بقسمة الأمثال في الطرف الأيسر من سطر دالة الهدف على مقابلاتها في السطر المحوري - مع إهمال النسب التي يقابلها قيم موجبة أو صفرية في السطر المحوري - فيكون المتغير الداخل هو الذي يملك أقل قيمة مطلقة للنسب الناتجة في حالة مسائل التكبير وأقل قيمة للنسب الناتجة في حالة مسائل التصغير. ويسمى عمود المتغير الداخل عندئذ بالعمود المحوري . وفي حالة التعادل فإننا نختار أحد

المتغيرات. وتجدر الإشارة هنا بأنه لو كانت جميع عناصر الطرف الأيسر للسطر المحوري موجبة لتعذر إيجاد المتغير الداخل وعندئذ تكون المسألة كلها غير ممكنة من وجهة نظر طريقة السمبلكس الثنوية.

(١,٦,٤) تحديد العنصر المحوري والسطر المحوري الجديد لطريقة السمبلكس الثنوية.

العنصر المحوري هو تقاطع السطر المحوري مع العمود المحوري والسطر المحوري الجديد هو ناتج قسمة السطر المحوري الحالي على العنصر المحوري.

(١,٦,٥) خوارزمية طريقة السمبلكس الثنوية.

بعد تحديد كل من المتغير الخارج والمتغير الداخل والعنصر المحوري فإن العمليات بطريقة السمبلكس الثنوية تكون مشابهة لنظيراتها بطريقة السمبلكس. وتتلخص هذه العمليات بالخطوتين الرئيستين التاليتين :

خطوة (١). نحول أي قيد من النوع ≥ إلى النوع ≤ (ويستثنى من ذلك قيود اللاسلبية) ونضيف متغيرات راكدة ثم نوجد حل أساسي ونختبر أمثليته وفقاً للشرط(١,٧,١). فإذا كان هذا الحل أمثلياً توقفنا وإلا انتقلنا للخطوة التالية.

خطوة (٢). نحدد المتغير الخارج وفقاً للشرط(١,٦,٢) والمتغير الداخل وفقاً للشرط (١,٦,٣) ثم نوجد حلاً جديداً ، فإذا كان هذا الحل الجديد أمثلياً توقفنا وإلا فإننا نكرر العمل بالخطوة (٢) لحين الوصول إلى الحل الأمثل المنشود.

والمثال التالي يوضح العمل بطريقة السمبلكس الثنوية.

مثال (١,٥)

صغر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3 \qquad (١,٤٠)$$

وفقاً للقيود:

$$x_1 + 3x_3 \geq 3$$

$$2x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل

بعد تحويل القيود التي من النوع ≥ إلى النوع ≤ وإضافة المتغيرات الراكدة إليها وكتابة دالة الهدف كأحد القيود فإننا نحصل على النموذج التالي:

صغر الدالة Z :

وفقاً للقيود:

$$Z - 4x_1 - 12x_2 - 18x_3 + 0.S_1 + 0.S_2 = 0 \quad (١,٤١)$$

$$-x_1 + 0.x_2 - 3x_3 + S_1 + 0.S_2 = -3$$

$$0.x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 0.S_1 + S_2 = -5$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

وكما نلاحظ فإن النموذج (١,٤١) ليس بالشكل القياسي ؛ لأن الأطراف اليمنى لواحد على الأقل من القيود (عدا قيود اللاسلبية) غير موجب، وهو مالا تشترطه طريقة السمبلكس الثنوية ، والحل الابتدائي لهذا النموذج معطى كما في الجدول رقم

(١,٨). وبفحص الجدول رقم (١,٨) نجد أن جميع المعاملات في سطر دالة الهدف غير موجبة(سالبة أو أصفار). ولما كانت المسألة قيد الدراسة هي مسألة تصغير فإن ذلك يعني أن "شرط الأمثلية" محقق في الحل الممثل بهذا الجدول، ولكن الحل الناتج فيه وهو$S_1 = -3$ و $S_2 = -5$ هو حل غير ممكن، لذا فشرط الأمثلية (١,٦,١) غير محقق ولا بد لنا إذاً من الانتقال للخطوة(٢) لتوليد حل جديد. فبموجب نتائج الجدول(١,٨) فإن S_2 هو المتغير الخارج (فسطر S_2 هو السطر المحوري)، والمتغير الداخل هو X_2 ، وبالتالي فالعنصر المحوري هو **2-** .

الجدول رقم (١,٨). الحل الابتدائي للنموذج (١,٤١).

متغيرات أساسية	X_1	متغير داخل X_2	X_3	S_1	S_2	الحل
Z	-4	-12	-18	0	0	0
S_1	-1	0	-3	1	0	-3
S_2 متغير خارج	0	**-2**	-2	0	1	-5
النسبة		6	9			

فالسطر المحوري الجديد هو:

5/2 -1/2 0 1 1 0 (السطر المحوري الجديد)

وبإجراء حسابات مماثلة لتلك التي نجريها بطريقة السمبلكس العادية وهي إيجاد جميع الأسطر الجديدة بموجب العلاقة (١,٢٨) – فإننا نحصل على الحل الجديد التالي والممثل بالجدول رقم (١,٩) وقد تحدد فيه كل من المتغير الخارج والداخل والعنصر المحوري.

ولو أجرينا الحسابات بطريق السمبلكس(العادية) على نتائج الجدول رقم (١,٩) لحصلنا على الحل المتمثل بالجدول رقم (١,١٠). وبفحص الجدول رقم (١,١٠) نجد أنه يمثل الحل الأمثل للنموذج (١,٤١) وهذا الحل هو:

$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, Z^*) = (0, 3/2, 1, 36)$. لاحظ أن قيم الحلول غير الممكنة تزايدت بالتدريج إلى أن وصلت لأكبر قيمة لها ٣٦ عند أول حل ممكن – فهو بالتالي حل أمثل – وهو ما يتوافق مع مضمون النتيجة(١,٢) السابقة.

الجدول رقم (١,٩). الحل التالي للحل الابتدائي للنموذج (١,٤١).

متغيرات أساسية	X_1	X_2	متغير داخل X_3	S_1	S_2	الحل
Z	-4	0	-6	0	-6	30
S_1 متغير خارج	-1	0	-3	1	0	-3
X_2	0	1	1	0	-1/2	5/2
النسبة	4		2			

الجدول رقم (١,١٠). الحل الأمثل للنموذج (١,٤١).

متغيرات أساسية	X_1	X_2	متغير داخل X_3	S_1	S_2	الحل
Z	-2	0	0	-2	-6	36
X_3	1/3	0	1	-1/3	0	1
X_2	-1/3	1	0	1/3	-1/2	3/2
النسبة						

(١,٦,٦) استخدام طريقة السمبلكس الثنوية بعد إضافة قيود

نشير أخيراً إلى أنه وبعد الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة السمبلكس فقد نشأ لدينا بعض القيود الجديدة فعندئذ لا حاجة لإعادة إيجاد الحل الأمثل للمسألة الناتجة بعد إضافة هذه القيود، ولكننا نضيف هذه القيود كسطور أخيرة إلى جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية (والتي يتحقق فيها شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف) ونتابع الحل بطريقة السمبلكس الثنوية إذا كانت هذه الأخيرة قابلة للتطبيق.

ولتوضيح هذه الفكرة، دعنا نعود إلى المثال(١,١) الخاص بإنتاج صنفي الوقود، ولنفترض أن إنتاج الصنف(II) من الوقود لا يكون مجدياً من الناحية الاقتصادية إلا إذا أنتج من 1500 وحدة على الأقل، عندئذ علينا إضافة القيد التالي :

$$x_2 \geq 1500 \qquad (١,٤٢)$$

ولا حاجة، في مثل هذه الحالة، أن نعيد حل المسألة بعد إضافة القيد الأخير (١,٤٢). ويكفينا عندها أن نعطي القيد (القيود) الجديد (الجديدة) المتغيرات الإضافية المناسبة (راكدة أو فائضة أو زائفة) وندرج القيد(القيود) الناتج (الناتجة) بعد هذه الإضافة كسطور أخيرة في جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية قبل هذه الإضافة. ففي حلتنا هنا لو أضفنا المتغير الفائض S_5 إلى القيد (١,٤٢) لحصلنا على :

$$y_2\text{-}S_5$$

$$S_5 - x_2 = 1500 \qquad (١,٤٣)$$

الآن نضيف القيد(١,٤٣) كسطر أخير إلى الجدول رقم(١,٥) - والذي يمثل الحل الأمثل لمثال(١,١) كمسألة تكبير – ونجري الحسابات الخاصة به فنحصل على الجدول التالي (الجدول رقم١,١١).

وكما نلاحظ فإن شرط الأمثلية(كمسألة تكبير) محقق في سطر دالة الهدف من الجدول رقم (١,١١) إلا أن الحل المتمثل في هذا الجدول أصبح غير ممكن الأمر الذي يمكننا متابعة الحل بطريقة السمبلكس الثنوية ابتداءً من هذا الجدول حيث نحصل على الحل الأمثل التالي (تحقق من ذلك).

$$(1800, 3650, 1500, 410, 600, 570000) = (x^*_1, S^*_2, x^*_2, S^*_4, S^*_1, Z^*)$$

الجدول رقم (١,١١). الجدول الناتج من الجدول رقم (١,٥) بعد إضافة القيد (١,٤٣).

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	الحل
Z	0	0	25/3	0	70	0	0	575000
X_1	1	0	1/3	0	0	0	0	2000
S_2	0	0	7.25/6	1	-2.9/2	0	0	4375
X_2	0	1	-2.5/6	0	1/2	0	0	1250
S_4	0	0	1.15/6	0	-1.5/2	1	0	525
S_5 متغير خارج	0	0	-2.5/6	0	-1/2	0	1	-250
النسبة								

(١,٧) تمارين (١)

أولاً: البرمجة الخطية البيانية

١- تمتلك شركة كبرى لإنتاج الأبواب والنوافذ ثلاثة معامل الأول يقوم بتصنيع إطارات ألومنيوم للأبواب، والثاني يقوم بتصنيع إطارات خشبية للنوافذ، والثالث يقوم بتصنيع الزجاج وتجميع منتجات المعملين الأولين لإخراجهما على شكل أبواب ونوافذ. وبسبب تناقص الأرباح فقد قررت الإدارة العليا للشركة إعادة النظر في برنامجها الإنتاجي الحالي واستبداله ببرنامج آخر يدرّ عليها ربحاً أكبر. ويتوقف مثل هذا البرنامج الإنتاجي بالطبع على كل من الطاقة الإنتاجية المتوافرة والطاقة المستهلكة لكل وحدة منتجة والأرباح العائدة لكل وحدة أيضاً. وقد تبين نتيجة الدراسة التي قام بها قسم بحوث العمليات بالشركة أن المشكلة التي تواجهها الشركة تتمثل في الطاقة الإنتاجية المحدودة المتوافرة لكل معمل مقاسة بالساعة في اليوم حيث بينت هذه الدراسة إمكانية أن يعمل المعمل الأول 4 ساعات والثاني 12 ساعة والثالث 18 ساعة يومياً، وأن كل باب مصنوع من الألومنيوم يستلزم ساعة بالمعمل الأول و3 ساعات بالمعمل الثالث وتقدر أرباحه بـ 12 ريال وكل نافذة مصنوعة من الخشب تستلزم ساعتين في المعمل الثاني وساعتين في المعمل الثالث وتقدر أرباحها بـ 20 ريال. ما هو مستوى الإنتاج الأمثل لكل من الأبواب والنوافذ والذي يحقق للشركة أكبر ربح ممكن؟.

٢- يقوم مصنع منتجات مطاطية بإنتاج نوع جديد من المطاط وذلك بمزج نوعين من المطاط (نوع I ونوع II) فإذا علمت أن كل نوع يحتوي على أربعة مكونات أو عناصر أساسية هي E_4 , E_3 , E_2 , E_1 وفقاً للنسب المئوية الموضحة في الجدول أدناه : وأن الشروط الأساسية لجعل النوع الجديد أكثر ملائمة للبيئة هي احتواء كل وحدة منتجة من هذا النوع على 1 كجم من E_1 ، 3 كجم من E_2 و 1 كجم من E_3 ونصف كجم من E_4 (على الأقل لكل منها). وأن تكلفة الكيلوجرام من النوع I هي 3.5 دولار في حين أن تكلفة كجم من النوع الثاني هي 4.5 دولار فما هي الكميات الواجب إدخالها من النوعين I و II لإنتاج وحدة من النوع الجديد بحيث تكون تكلفة الوحدة منه أقل ما يمكن.

	E_1	E_2	E_3	E_4
I	0 %	50 %	35 %	15 %
II	45 %	30 %	0 %	25 %

٣- يُعني أحد مستشفى القوات المسلحة بتوزيع الممرضات بشكل مناسب لمساعدة الأطباء العاملين في غرفة الإسعاف ، وقد دلت الدراسة الإحصائية أنه يمكن تقسيم يوم ما لستة فترات مختلفة لعدد الحالات الإسعافية التي تصل للإسعاف. البيانات كما في الجدول التالي :

الفترة	7-11	11-15	15-19	19-23	23-3	3-7
متوسط عدد الحالات	80	60	120	60	40	20

(الفترة 23-3 تعني من الساعة 11 ليلاً إلى الساعة الثالثة صباحاً لليوم التالي). دلت السجلات أيضاً أن كل ممرضة تستطيع مساعدة الطبيب في 2.5 حالة بالمتوسط في الساعة وأن الممرضات يعملن بالتناوب وفقاً لثلاث فترات ، الأولى من 7 صباحاً

إلى 15 بعد الظهر والثانية من 15 بعد الظهر إلى 23 ليلاً والثالثة من 23 إلى السابعة صباحاً غير أن هناك ثلاث ممرضات يرغبن في أن يبدأن عملهن اعتباراً من 11 صباحاً واثنتان ترغبان في العمل من الساعة السابعة مساءً. ضع هذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية إذا كان الهدف هو استخدام أقل عدد ممكن من الممرضات. لاحظ إمكانية استخدام مثل هذا المثال لتوزيع المناوبات في أي عمل مثل المناوبات العسكرية.

٤– شركة صناعية تنتج نوعين من السلع B , A . إن عملية الإنتاج تتطلب تمرير السلع على آلتين مختلفتين. الآلة (1) متوافرة يومياً لمدة 15 ساعة والآلة (2) لمدة 10 ساعات. أما الوقت الذي يحتاجه إنتاج كل نوع من السلع على الآلات والعائد الحاصل من إنتاج كل وحدة فهو معطى في الجدول التالي :

السلعة	الآلة (1)	الآلة (2)	العائد
A	2	2	4
B	5	1	1

لأسباب معينة ، يجب ألا تقل الكميات المنتجة من السلعة A عن 2 ومجموع الكميات المنتجة من B , A عن 3 .

ترغب الشركة في رفع العائد الإجمالي من إنتاج السلع.

(أ) أكتب برنامجاً خطياً يمثل المشكلة.

(ب) ارسم فضاء الحل وحدد الحل الأمثل.

(ج) ماذا يكون الحل الأمثل لو كان العائد من السلعة B هو ٢ عوضاً عن ١ ؟

(د) بكم نستطيع أن نخفض قيمة كل قيد من القيود بطريقة لا نغير فيها الحل الأمثل؟.

(هـ) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه عائد السلعة A دون أن يتغير الحل الأمثل وكذلك بالنسبة لـ B.

(و) بكم نستطيع أن نرفع عدد الساعات المتوافرة يومياً على الآلة (1) كي نحسن الحل الأمثل كذلك بالنسبة للآلة (2)؟.

نتصور الآن أن تكلفة إنتاج وحدة من A هي 1 ريال ومن B نصف ريال وأن الشركة ترغب في معرفة الكميات المنتجة من السلعة A , B التي تقلل لها التكلفة الإجمالية لإنتاج هاتين السلعتين :

(أ) أكتب النموذج الرياضي للمشكلة في هذه الحالة.

(ب) حدد الحل الأمثل للمشكلة.

(ج) لكم نستطيع أن نقلل الكمية القصوى لمجموع الكميات المنتجة من B , A بطريقة تقلل من التكاليف الإجمالية؟.

ثانياً: طريقة السمبلكس

١- ترغب إحدى الشركات الصناعية في صناعة أقراص فيتامين تحوي الفيتامينات A ، C و D ولابد لكل قرص أن يحوي حداً أدنى من كل من هذه الفيتامينات. نستخلص الفيتامينات A ، C وD من ثلاث مواد غذائية (١)، (٢)، (٣).

يبين الجدول التالي ما تحويه هذه المواد من الفيتامينات المذكورة وتكلفة الوحدة من المواد الثلاث الحاوية عليها بالإضافة إلى الحد الأدنى الذي يجب أن يحويه كل قرص من الفيتامينات A ، C و D . هدف الشركة هو جعل تكلفة إنتاج القرص أقل ما يمكن. ما هو عدد الوحدات من المواد (١)، (٢)، (٣) الواجب إدخالها في صناعة القرص والتي يتحقق من أجلها هدف الشركة.

الحد الأدنى الواجب توافره في القرص	المقادير (بالملغ) التي تحويها المواد مع الفيتامينات			الفيتامينات
	مادة (٣)	مادة (٢)	مادة (١)	
0.5	5	0.5	0.5	A
25	5	5	50	C
5	5	50	10	D
	0.5	1.1	1.0	تكلفة الوحدة بالريال

(و) بكم نستطيع أن نرفع عدد الساعات المتوافرة يومياً على الآلة (1) كي نحسن الحل الأمثل كذلك بالنسبة للآلة (2)؟.

نتصور الآن أن تكلفة إنتاج وحدة من A هي 1 ريال ومن B نصف ريال وأن الشركة ترغب في معرفة الكميات المنتجة من السلعة A , B التي تقلل لها التكلفة الإجمالية لإنتاج هاتين السلعتين:

(أ) أكتب النموذج الرياضي للمشكلة في هذه الحالة.

(ب) حدد الحل الأمثل للمشكلة.

(ج) لكم نستطيع أن نقلل الكمية القصوى لمجموع الكميات المنتجة من B , A بطريقة تقلل من التكاليف الإجمالية؟.

ثانياً: طريقة السمبلكس

١- ترغب إحدى الشركات الصناعية في صناعة أقراص فيتامين تحوي الفيتامينات A ، C و D ولابد لكل قرص أن يحوي حداً أدنى من كل من هذه الفيتامينات. نستخلص الفيتامينات A ، C وD من ثلاث مواد غذائية (١)، (٢)، (٣).

يبين الجدول التالي ما تحويه هذه المواد من الفيتامينات المذكورة وتكلفة الوحدة من المواد الثلاث الحاوية عليها بالإضافة إلى الحد الأدنى الذي يجب أن يحويه كل قرص من الفيتامينات A ، C و D . هدف الشركة هو جعل تكلفة إنتاج القرص أقل ما يمكن. ما هو عدد الوحدات من المواد (١)، (٢)، (٣) الواجب إدخالها في صناعة القرص والتي يتحقق من أجلها هدف الشركة.

الفيتامينات	المقادير (بالملغ) التي تحويها المواد مع الفيتامينات			الحد الأدنى الواجب توافره في القرص
	مادة (١)	مادة (٢)	مادة (٣)	
A	0.5	0.5	5	0.5
C	50	5	5	25
D	10	50	5	5
تكلفة الوحدة بالريال	1.0	1.1	0.5	

٢- ترغب إحدى مؤسسات الإنتاج الحربي في جدولة طواقم العمل لديها من الفنيين وفق ثلاث طواقم يعمل كل منها ثمان ساعات. ولضمان الاستمرار في العمل فإن عملية استبدال الطواقم لا تكون كلية ولكنها تكون على النحو التالي :
كل أربع ساعات يتم ضم فنيين إلى من سبق وأتم أربع ساعات عمل وبحيث يقضي كل فني ثمان ساعات عمل متواصلة. الجدول التالي يبين طاقة الفنيين اللازمة لست فترات كل منها أربع ساعات.

الفترات (أو الوقت) من اليوم	الحد الأدنى المطلوب من الفنيين
من 2 صباحاً إلى 6 صباحاً	10
من 6 صباحاً إلى 10 صباحاً	25
من 10 صباحاً إلى 2 بعد الظهر	40
من 2 بعد الظهر إلى 6 مساءً	50
من 6 مساءً إلى 10 مساءً	20
من 10 مساءً إلى 2 صباحاً	15

أوجد أفضل جدولة لطواقم العمل التي تستخدم أقل قدر ممكن من الفنيين.

٣ – تنتج مصانع الإنتاج الحربي ثلاثة منتجات A ، B و C في خمسة مصانع تمتلك طاقة إنتاجية مختلفة مما ينتج عنه اختلاف تكاليف إنتاج المنتجات المذكورة من مصنع لآخر. إذا علمت أن المصنعين الرابع والخامس لا تنتج C وأن تكاليف إنتاج الوحدة للمنتجات A ، B و C في المصانع الخمسة وطاقة هذه المصانع بالإضافة إلى الحد الأدنى المطلوب من هذه المنتجات معطاة كما في الجدول التالي أوجد أفضل برنامج إنتاجي للمصانع الخمسة والذي يجعل تكاليف الإنتاج الكلية للمنتجات A ، B و C أقل ما يمكن.

٥- يحتاج أحد المكاتب الرئيسة للبريد بمدينة الرياض إلى عد
يختلف باختلاف أيام الأسبوع كما يلي :

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس
17	13	15	19	14	16

ولضمان استمرارية العمل فقد تقرر أن يعمل كل موظف خمسة
ثم يرتاح بعدها لمدة يومين. يهدف مكتب البريد إلى جعل عدد الموظف
مدار الأسبوع أقل ما يمكن. المطلوب :

(أ) كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

٦- ترغب إحدى الشركات الوطنية في استثمار عوائدها من
ومشتقاته. في حوزة الشركة حالياً مبلغ 160 مليون ريال معدة للا
التقديرات الأولية على أنه بعد مرور سنة فإن بمقدور الشركة أن توفر
ريال أخرى للاستثمار. يتوافر للشركة حالياً أو بعد مرور سنة خمس فر
على شكل أسهم تختلف مجموع قيمها هذا العام عنها في العام المقبل عل
(القيم بملايين الريالات). تستطيع الشركة أن تشتري أي جزء من الق
لأسهم أي فرصة. أما الأرباح المتوقعة من الفرص الخمسة لهذا العام ول
على الترتيب: 13 ، 16 ، 16 ، 14 ، 39 مليون ريال على الترتيب.
لجعل الأرباح الكلية من استثمار المبالغ المتوافرة هذا العام ومبالغ العا
يمكن. أكتب النموذج الرياضي للمسألة وأوجد الحل الأمثل الشركة.

فرصة (٥)	فرصة (٤)	فرصة (٣)	فرصة (٢)	فرصة (١)
116	20	20	212	44
132	4	20	24	12

ت
ة بالوحدة

تصادية كبيرة
ساحة الصالحة
يات الأرض
هذه الأراضي
ت حداً أقصى
صى من الماء
لاثة. الجدول
وائد من كل
لى تحقيق أكبر

المنطقة
1
2
3

نوع المحصول
قمح
ذرة
شوندر

٥- يحتاج أحد المكاتب الرئيسة للبريد بمدينة الرياض إلى عدد من الموظفين يختلف باختلاف أيام الأسبوع كما يلي :

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
17	13	15	19	14	16	11

ولضمان استمرارية العمل فقد تقرر أن يعمل كل موظف خمسة أيام متواصلة ثم يرتاح بعدها لمدة يومين. يهدف مكتب البريد إلى جعل عدد الموظفين الكلي على مدار الأسبوع أقل ما يمكن. المطلوب :

(أ) كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

٦- ترغب إحدى الشركات الوطنية في استثمار عوائدها من تصنيع البترول ومشتقاته. في حوزة الشركة حالياً مبلغ 160 مليون ريال معدة للاستثمار وتدل التقديرات الأولية على أنه بعد مرور سنة فإن بمقدور الشركة أن توفر مبلغ 80 مليون ريال أخرى للاستثمار. يتوافر للشركة حالياً أو بعد مرور سنة خمس فرص للاستثمار على شكل أسهم تختلف مجموع قيمها هذا العام عنها في العام المقبل على النحو التالي (القيم بملايين الريالات). تستطيع الشركة أن تشتري أي جزء من القيمة الإجمالية لأسهم أي فرصة. أما الأرباح المتوقعة من الفرص الخمسة لهذا العام وللعام المقبل فهي على الترتيب: 13 ، 16 ، 16 ، 14 ، 39 مليون ريال على الترتيب. تهدف الشركة لجعل الأرباح الكلية من استثمار المبالغ المتوافرة هذا العام ومبالغ العام المقبل أكبر ما يمكن. أكتب النموذج الرياضي للمسألة وأوجد الحل الأمثل الشركة.

فرصة (٥)	فرصة (٤)	فرصة (٣)	فرصة (٢)	فرصة (١)	العام
116	20	20	212	44	هذا العام
132	4	20	24	12	العام المقبل

المنتجات	المصانع					الحد الأدنى للوحدات
	1	2	3	4	5	
A	26	28	24	30	27	300
B	29	33	28	32	31	200
C	40	43	29	-	-	400
الطاقة الإنتاجية بالوحدة	200	400	200	500	300	

٤- تخطط وزارة الزراعة والمياه لزراعة ثلاث مناطق لإنتاج كميات اقتصادية كبيرة من القمح والذرة والشوندر السكري. ويتوقف إنتاج كل منطقة على المساحة الصالحة للزراعة وكمية الماء الذي تستهلكه هذه المساحة. يبين الجدول التالي كميات الأرض الصالحة للزراعة في كل منطقة (مقاسة بالهكتار) وما تستهلكه كل منطقة من هذه الأراضي من الماء (مقاسة بالقدم المكعب). ومع ذلك فإن وزارة الزراعة والمياه قد حددت حداً أقصى للكميات التي تنوي زراعتها من كل صنف من الأصناف الثلاثة وحداً أقصى من الماء (قدم مكعب) الذي ستخصصه لكل هكتار من الأرض في كل من المناطق الثلاثة. الجدول التالي يبين تخصيصات وزارة الزراعة والمياه المشار إليها آنفاً بالإضافة إلى العوائد من كل هكتار من الأراضي في كل من المناطق الثلاث .إذا علمت أن الوزارة تهدف إلى تحقيق أكبر ربح ممكن فالمطلوب : (أ) أكتب نموذج المسألة. (ب) أوجد الحل الأمثل.

المنطقة	المساحة الصالحة للزراعة	كمية الماء المتوافرة مقاسة بالقدم المكعب
1	4000	6000
2	6000	8000
3	3000	3750

نوع المحصول	الحد الأقصى المخصص للزراعة (هكتار)	الحد الأقصى المخصص لري الهيكتار (قدم^3)	الربح المتوقع بالريال
قمح	5000	1	1000
ذرة	3250	2	9000
شوندر	6000	3	16000

٥- يحتاج أحد المكاتب الرئيسة للبريد بمدينة الرياض إلى عدد من الموظفين يختلف باختلاف أيام الأسبوع كما يلي :

السبت	الأحد	الاثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة
17	13	15	19	14	16	11

ولضمان استمرارية العمل فقد تقرر أن يعمل كل موظف خمسة أيام متواصلة ثم يرتاح بعدها لمدة يومين. يهدف مكتب البريد إلى جعل عدد الموظفين الكلي على مدار الأسبوع أقل ما يمكن. المطلوب :

(أ) كتابة النموذج الرياضي لهذه المسألة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

٦- ترغب إحدى الشركات الوطنية في استثمار عوائدها من تصنيع البترول ومشتقاته. في حوزة الشركة حالياً مبلغ 160 مليون ريال معدة للاستثمار وتدل التقديرات الأولية على أنه بعد مرور سنة فإن بمقدور الشركة أن توفر مبلغ 80 مليون ريال أخرى للاستثمار. يتوافر للشركة حالياً أو بعد مرور سنة خمس فرص للاستثمار على شكل أسهم تختلف مجموع قيمها هذا العام عنها في العام المقبل على النحو التالي (القيم بملايين الريالات). تستطيع الشركة أن تشتري أي جزء من القيمة الإجمالية لأسهم أي فرصة. أما الأرباح المتوقعة من الفرص الخمسة لهذا العام وللعام المقبل فهي على الترتيب: 13 ، 16 ، 16 ، 14 ، 39 مليون ريال على الترتيب. تهدف الشركة لجعل الأرباح الكلية من استثمار المبالغ المتوافرة هذا العام ومبالغ العام المقبل أكبر ما يمكن. أكتب النموذج الرياضي للمسألة وأوجد الحل الأمثل الشركة.

فرصة (٥)	فرصة (٤)	فرصة (٣)	فرصة (٢)	فرصة (١)	العام
116	20	20	212	44	هذا العام
132	4	20	24	12	العام المقبل

٧- تمتلك شركة لتسويق أجهزة الكمبيوتر الشخصية عدة مراكز. تحتاج هذه المراكز إلى مؤهلين لإصلاح وضبط الأجهزة وتدريب المشترين على كيفية استخدام الأجهزة المشتراة. ترغب الشركة في جدولة حاجتها من هؤلاء الفنيين للأشهر الخمسة المقبلة ونتيجة للخبرة السابقة فقد قدَّرت الشركة أن ساعات العمل اللازمة لها في هذه الأشهر كما يلي :

شهر (٥)	شهر (٤)	شهر (٣)	شهر(٢)	شهر (١)
11000	9500	8000	7000	6000

يتوافر في بداية الشهر (١) 50 مؤهل يستطيع أن يعمل كل منهم 160 ساعة شهرياً. ولتغطية حاجة الشركة من المؤهلين مستقبلاً فإن على هؤلاء المؤهلين أن يقوموا بتدريب أشخاص جدد ليشاركوهم العمل مستقبلاً. تخضع عملية تدريب الأشخاص الجدد للشروط التالية : لابد لكل متدرب جديد من أن يخضع لإشراف أحد المؤهلين ولمدة 50 ساعة وعلى مدار شهر كامل. وتقوم الشركة في هذه الحالة بدفع 8000 ريال للمدرب و 4000 ريال للمتدرب. في نهاية كل شهر فإن 50% من المتدربين الذين أصبحوا مؤهلين لا يلتحقون بالعمل نظراً لحاجتهم لمزيد من التدريب. ترغب الشركة في جعل المصاريف الكلية التي تدفعها للمؤهلين والمتدربين واللازمة لتغطية حاجتها من ساعات العمل خلال الأشهر الخمسة المقبلة أقل ما يمكن. والمطلوب صياغة المشكلة التي تواجهها الشركة كمسألة برمجة خطية ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

٨- تقوم إحدى المصافي الوطنية لتكرير البترول بإنتاج أربعة أنواع من الزيوت البترولية هي : الديزل، البنزين العادي، بنزين الطائرات والكيروسين وذلك من ثلاثة أنواع I ، II ، III من البترول الخام. ويباع البرميل من هذه الأنواع للمصفاة المذكورة بسعر تكلفة الإنتاج وهي 16 ، 11 و 13 ريالاً على الترتيب كما يتوافر للمصفاة يومياً 12000 ، 18000 و 15000 برميل من البترول الخام يومياً من الأنواع الثلاثة على

الترتيب. بالإضافة إلى ذلك فإن نسبة شوائب الكبريت في الأنواع الثلاثة هي 0.05 ، 0.03 و 0.45 أونصة في البرميل على الترتيب بالإضافة لذلك فإن نوعاً آخر من القطران يتبقى بعد استخراج الزيوت الأربعة المذكورة. يبين الجدول التالي النسب المئوية التي تنتجها الأنواع الثلاثة من البترول الخام بالإضافة إلى الحد الأعلى المسموح به من الكبريت في البرميل. تبلغ تكاليف تكرير البرميل 4 ريالات كما أن الطاقة العليا للمصفاة هي تكرير 40000 برميل يومياً. تهدف المصفاة إلى جعل عوائدها من بيع الأنواع الأربعة من الزيوت والقطران أكبر ما يمكن. صغ هذه المشكلة على شكل مسألة برمجة خطية وأوجد الحل الأمثل لها.

البترول الخام	الزيوت				
	بنزين	ديزل	بنزين طائرات	كيروسين	قطران
I	35	15	25	15	10
II	50	20	10	20	15
III	20	25	35	15	10
سعر البيع للبرميل (ريال)	51	48	45	43	38
الحد الأقصى المسموح به من الكبريت	0.0003	0.0006	0.0007	0.0009	0.0007

الفصل الثاني

مدخل إلى البرمجة العددية

(٢,١) مقدمة

إن معظم مسائل البرمجة الخطية التي نواجهها في الواقع العملي تتضمن قيدا إضافيا واضحاً أو ضمنياً يقتضي أن قيم *بعض أو كل* المتغيرات في هذه المسائل هي قيم (أعداد) صحيحة. فعلى سبيل المثال، إن مصنعا للمكاتب وخزائن الكتب لا يستطيع أن يصنع جزءا من مكتب أو خزانة ولا بد من صناعة عدد كامل (صحيح) من أي منهما. ومن هنا برزت أهمية التعامل مع هذا النوع من المسائل التي تكون فيها قيم المتغيرات أعدادا صحيحة. وفي هذا الكتاب، سنعالج المسائل التي تأخذ فيها المتغيرات قيما صحيحة فقط، كأن تأخذ أحد القيمتين 0 أو 1 (والتي نسميها أعدادا ثنائية) أو تلك التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيما غير صحيحة كعدد الأشخاص القائمين بمهمة معينة. وتسمى مسائل الأمثلية التي من هذا النوع باسم مسائل "*برمجة عددية*" (Integer Programming اختصارا IP). وتعتبر البرمجة العددية حالة خاصة من البرمجة الخطية ولذا يطلق عليها اسم "البرمجة الخطية العددية"(Integer Linear Programming اختصارا ILP). أما عندما يمكن لبعض قيم متغيرات المسألة قيد الدراسة أن تكون قيما غير صحيحة فإننا أمام مسألة برمجة غير خطية (Nonlinear Programming). وتجدر الإشارة هنا إلى أن استخدام الأعداد

الثنائية عادة ما يكون لحوادث (أو لعمليات) يمكن أن تقع (أو أن يتم فعلها) ويقابل ذلك الرقم 1 أو لا تقع (أو لا يتم فعلها) ويقابل ذلك الرقم 0. ومن أمثلة ذلك خصص أولا تخصص شخص معين لوظيفة معينة ، افعل أو لا تفعل عمل معين ، موافق أو غير موافق على مرشح ما للانتخابات ... إلخ.

(٢,٢) أنماط البرمجة الخطية العددية

كما أشرنا سابقاً فإننا نصادف بعض المسائل التي تكون فيها قيم كل المتغيرات قيماً عددية صحيحة ، وبعض المسائل التي تكون فيها بعض قيم المتغيرات قيماً عددية صحيحة وبعضها الأخر قيما ثنائية (0 أو 1) ، وبعض المسائل التي تكون فيها قيم كافة المتغيرات قيما ثنائية. وعلى ضوء ذلك فإن مسائل البرمجة الخطية العددية قد تم تصنيفها إلى عدة أنماط كما هو موضح في التعاريف والأمثلة المعطاة فيما يلي :

تعريف (٢,١)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية*" (Integer Linear Programming اختصارا ILP) إذا كانت قيم بعض أو كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

تعريف (٢,٢)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية صرفة أو بحته*" Pure Integer Linear Programming اختصارا (PILP) إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

تعريف (٢,٣)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" Mixed Integer Linear Programming اختصارا (MILP) إذا كانت قيم بعض متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية.

تعريف (٢,٤)

يقال عن مسألة برمجة خطية إنها مسألة "*برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم*" (0-1 Integer Linear Programming اختصارا 0-1 ILP) إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي 0 أو 1.

وفيما يلي نسوق بعض الأمثلة التوضيحية لهذه الأنماط من البرمجة الخطية العددية.

مثال (٢,١)

يهدف مختبر للأبحاث العلمية لعمل مشاريع بحثية للسنة القادمة حول نوع من الأدوية ونوع من المنتجات النباتية. يعطي الجدول رقم (٢,١) ما يتوافر سنويا من القوى البشرية المتنوعة (علماء، فنيين، إداريين) وما تتطلبه كل وحدة من هذه المشاريع من هذه القوى إضافة إلى الربح المتوقع لكل مشروع (بآلاف الريالات).

الجدول رقم (٢,١). البيانات الخاصة لمثال (٢,١).

القوى البشرية المتنوعة	ما يتطلبه المشروع من القوى البشرية		المتوافر سنويا من القوى البشرية
	الأدوية	المنتج النباتي	
علماء	4	5	30
فنيين	6	4	40
إداريين	1	2	10
الربح المتوقع للمشروع	20	30	

يهدف مختبر الأبحاث لمعرفة ما يجب إنجازه من كل من مشروعي الأبحاث بحيث يحقق أكبر ربح سنوي ممكن والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمسألة مختبر الأبحاث.

الحل

إن متغيرات القرار هي عدد مشاريع الأدوية التي يجب إنجازها سنويا ولتكن x_1 ، وعدد مشاريع المنتجات النباتية التي يجب إنجازها سنويا ولتكن x_2. ومن الواضح

أن كلا المتغيرين هو عدد صحيح غير سالب. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$4x_1 + 5x_2 \le 30$$

$$6x_1 + 4x_2 \le 40$$

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

ونظرا لأن كافة المتغيرات في هذه المسألة لا تأخذ إلا قيما صحيحة فإن المسألة في هذا المثال هي مسألة "*برمجة خطية عددية بحتة*". وهي بنفس الوقت مسألة "*برمجة خطية عددية*" حسب التعريف (٢,١).

مثال (٢,٢)

تهدف وحدة الاستشارات العلمية في إحدى الجامعات إلى التعاقد مع بعض وزارات الدولة لتقديم استشارات مستعجلة للمشاريع التي تزمع هذه الوزارات القيام بها في العام المقبل، بحيث إن أيا من هذه الوزارات ترغب بأن تستكمل الاستشارة

الخاصة بأي مشروع في نفس السنة (أي أنه لا يمكن تجزئة الاستشارة لأكثر من سنة). ولتحقيق مزيد من الأرباح فإن وحدة الاستشارات هذه قد قررت تقديم استشارات ذات مدد مفتوحة لوزارات تزمع القيام بمشاريع طويلة الأجل (أي أن أي استشارة من هذا النوع الثاني يمكن أن تنتهي في أي وقت من السنة نفسها أو من السنة التالية). يبين الجدول رقم (٢,٢) التالي كافة البيانات المتعلقة بهذين النوعين من الاستشارات. تهدف وحدة الاستشارات لمعرفة عدد كل من نوعي الاستشارات والتي تحقق لها أكبر ربح سنوي ممكن، والمطلوب صياغة النموذج الرياضي لمسألة وحدة الاستشارات العلمية هذه.

الجدول رقم (٢,٢) . البيانات الخاصة لمثال (٢,٢)

القوى البشرية المتنوعة	ما تتطلبه الاستشارة من القوى البشرية		المتوافر سنويا من القوى البشرية
	مستعجلة	غير مستعجلة	
علماء	4	3	8
فنيين	1	1	3
الربح المتوقع للاستشارة بمئات آلاف الريالات	2	1	

الحل

إن متغيرات القرار لهذه المسألة هي عدد الاستشارات المستعجلة التي يجب تقديمها سنويا ولتكن x_1 ، ومن الواضح أن x_1 هو عدد صحيح غير سالب لعدم إمكانية تجزئة الاستشارة المستعجلة لأكثر من سنة وعدد الاستشارات غير المستعجلة (ذات المدة المفتوحة) التي يجب تقديمها سنويا ولتكن x_2 ، ومن الواضح أن x_2 هو عدد غير سالب لإمكانية تجزئة الاستشارة غير المستعجلة لأكثر من سنة. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي :

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

x_1 عدد صحيح

مثال (٢,٣)

تمتلك شركة كبرى ميزانية تقدر ب 6.5 مليون ريال تود إنفاقها على البحث العلمي لتطوير مشاريع الشركة الخمسة المتوافرة حاليا. ومن المتوقع أن يؤدي مثل هذا التطوير إلى نفقات وإلى مزيد من الأرباح للشركة في كل مشروع وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٢,٣).

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع التي يجب الإنفاق عليها لتطويرها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الجدول رقم (٢,٣). البيانات الخاصة لمثال (٢,٣).

المشروع	1	2	3	4	5
النفقات (مليون ريال)	1.2	3.2	1.8	4.0	2.5
الربح المتوقع (مليون ريال)	5.0	4.5	4.8	8.0	4.2

الحل

من الواضح أن على الشركة أن تقرر أن تتبنى الإنفاق على مشروع ما أو ألا تتبناه. لذا فإن متغيرات القرار هي متغيرات ثنائية تأخذ القيمة 1 في حال تبني الإنفاق على المشروع وتأخذ القيمة 0 في حال عدم تبني الإنفاق على هذا المشروع. وبذلك فإن متغيرات القرار ستكون على النحو التالي:

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{إذا قررت الشركة أن تتبنى المشروع } j \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $j = 1,\ldots,5$. ووفقا للبيانات السابقة فإن النموذج الرياضي للمسألة يكون كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = 5x_1 + 4.5x_2 + 4.8x_3 + 8x_4 + 4.2x_5$$

وفقا للقيود:

$$1.2x_1 + 3.2x_2 + 1.8x_3 + 4x_4 + 2.5x_5 \leq 6.5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0,1$$

ووفقا للتعريف (٢,٤) فإن هذه المسألة هي مسألة " *برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم*".

وبالتدقيق في التعاريف الأربعة السابقة لأنماط البرمجة الخطية العددية فإننا نلاحظ بسهولة أن أيا منها هو حالة خاصة مما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" (MILP) والتي نورد التعريف الرياضي لها فيما يلي

تعريف (٢,٥) التعريف الرياضي العام لمسألة "البرمجة *الخطية العددية المختلطة*" (MILP).

استنادا إلى التعاريف والأمثلة التوضيحية السابقة فإنه يمكن إعطاء تعريف رياضي عام لما أسميناه مسألة البرمجة *الخطية العددية المختلطة* (MILP) يندرج تحته جميع أنماط البرمجة الخطية العددية التي تحدثنا عنها أعلاه وهو كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = \mathbf{c\,x} + \mathbf{d\,y}$$

وفقا للقيود:

$$\mathbf{A\,x} + \mathbf{D\,y} \le \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \ge \mathbf{0}$$

$\mathbf{x}$ متجه من الأعداد الصحيحة

حيث

- $\mathbf{c} = (c_j), j = 1,2,\cdots,n$ هي متجة سطري مكون من n عنصر تعبر عن عوائد ربحية أو تكاليف.
- $\mathbf{d} = (d_j), j = 1,2,\cdots,k$ هي متجة سطري مكون من k عنصر تعبر عن عوائد ربحية أو تكاليف.
- $\mathbf{A} = (a_{ij}), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ هي مصفوفة $(m \times n)$ وتعبر عن أمثال في قيود المسألة.
- $\mathbf{D} = (d_{ij}), i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,k$ هي مصفوفة $(m \times k)$ وتعبر عن أمثال في قيود المسألة.

- $\mathbf{b} = (b_i), i = 1,2,\cdots,m$ هي متجة عمودي مكون من m عنصر تعبر عن أمثال في الأطراف اليمنى للقيود .
- $\mathbf{x} = (x_j), j = 1,2,\cdots,n$ هي متجة عمودي مكون من n من المتغيرات التي تأخذ قيما صحيحة.
- $\mathbf{y} = (y_j), j = 1,2,\cdots,k$ هي متجة عمودي مكون من k من المتغيرات التي تأخذ قيما حقيقية.

فعندما يكون $k = 0$ فإن كافة متغيرات المسألة تأخذ قيما صحيحة ونحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية بحتة*". وعندما يكون $n = 0$ فإن كافة متغيرات المسألة تأخذ قيما حقيقية ونحن عندئذ أمام مسألة "*برمجة خطية بحتة*". وعندما يكون $n \neq 0$ و $k \neq 0$ فإن بعض متغيرات المسألة تأخذ قيما صحيحة وبعضها الأخر يأخذ قيما حقيقية ونحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*". أما عندما نقصر قيم كافة متغيرات المسألة على القيمتين 0 أو 1 فنحن عندئذ أمام ما أسميناه مسألة " *برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم*".

(٢,٣) بعض صعوبات حل مسائل البرمجة الخطية العددية

إن حل مسائل "البرمجة الخطية العددية" يعتمد في بعض الأحيان على حل مسألة" البرمجة الخطية "المقابلة والتي نحصل عليها بإسقاط القيود المتعلقة بالقيم العددية الصحيحة للمتغيرات واستبدالها بقيود تسمح لهذه المتغيرات بأن تأخذ قيما حقيقية والتي عادة ما نشير إليها باسم مسألة "البرمجة الخطية المخففة" (اختصارا "المسألة المخففة") المقابلة لمسألة "البرمجة الخطية العددية". ولذا ولكي يكون الكتاب متكاملا فقد قدمنا عرضا مختصرا لبعض الطرق ذات الصلة والمتّبعة في حل مسائل "البرمجة الخطية" في الفصل الأول من هذا الكتاب. ومع ذلك فإن حل مسألة "البرمجة الخطية المخففة"

المقابلة قد لا يوصل إلى حل دقيق لمسألة "البرمجة الخطية العددية" الأصلية (اختصارا "المسألة الأصلية") كما هو موضح في المثال التالي:

مثال (٢,٤)

بالعودة إلى مثال (٢,١) الخاص بعدد المشاريع البحثية الواجب انجازها لكل من "الأدوية" و"المنتج النباتي" فإن الحل الأمثل لمسألة "البرمجة الخطية المخففة" المقابلة لمسألة "البرمجة الخطية العددية" في مثال (٢,١) هو ($x_1 = 3\frac{1}{3}$ ، $x_2 = 3\frac{1}{3}$) وقيمته $Z = 166\frac{2}{3}$. أما مسألة البرمجة الخطية العددية في مثال(٢,١) وكما سنرى لاحقاً فإن لها حلان أمثليان هما ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 4$) و($x_1 = 5$ ، $x_2 = 2$) وفيهما $Z = 160$. ولو قمنا بتدوير حل المسألة المخففة إلى الأعلى لحصلنا على الحل ($x_2 = 4$ ، $x_1 = 4$) ولو دورنا هذا الحل إلى الأسفل لحصلنا على الحل ($x_1 = 3$ ، $x_2 = 3$). ومع أن كلا من هذين الحلين هو حل ممكن "للمسألة الأصلية" إلا أن أيا من هذين الحلين الأخيرين غير قريب من أي من الحلين الأمثلين لمسألة البرمجة الخطية العددية الأصلية. ولكن، وكما سنرى، فإن حل "المسألة المخففة" يساعد في تسهيل عملية حل "المسألة الأصلية". ذلك لأن قيمة Z عند الحل الأمثل "للمسألة المخففة" هي بمثابة حد أعلى (حد أدنى) في مسائل التكبير (في مسائل التصغير) لقيمة Z في "المسألة الأصلية" وهذه القاعدة صحيحة دوما وليس في هذا المثال فقط.

ثمة فائدة أخرى يمكن أن نجنيها من حل "المسألة المخففة" هي أن إيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية العددية الأصلية يكلفنا أحيانا الكثير من الجهد والوقت يقودان إلى التضحية بقبول الحل الأمثل "للمسألة المخففة" المقابلة "للمسألة الأصلية"، بعد تقريبه إلى الأدنى، كحل تقريبي "للمسألة الأصلية". ومع ذلك فإن القبول بمثل هذه الحلول التقريبية قد يقود إلى حلول غير ممكنة "للمسألة الأصلية". وللتوضيح نسوق المثال التالي.

مثال (٢,٥)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية :

كبر الدالة :

$$Z = -2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$9x_1 - 3x_2 \geq 11$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

إن الحل الأمثل للمسألة المخففة هو ($x_2 = 3.7619$ ، $x_1 = 2.4762$). أما الحل الأمثل للمسألة الأصلية فهو ($x_2 = 2$ ، $x_1 = 2$). فلو قمنا بتدوير حل المسألة المخففة (إلى الأدنى) لحصلنا على الحل ($x_2 = 3$ ، $x_1 = 2$) وهو حل غير ممكن للمسألة الأصلية إذ أنه لا يحقق القيد الأول لهذ المسألة.

سنستعرض فيما تبقى من هذا الفصل بعض الطرق الأساسية المستخدمة في حل مسائل "البرمجة الخطية العددية" وهي في الحقيقة كافية للمبتدئين والراغبين بأخذ فكرة موجزة عن كيفيية التعامل مع مسائل "البرمجة الخطية العددية" وحلها باستخدام مثل

هذه الطرق البسيطة. على أننا سنقدم تفاصيل أوسع وكذلك طرقا جديدة لحل مسائل "البرمجة الخطية العددية" في الجزء الثاني من هذا الكتاب.

(٢,٤) بعض طرق حل مسائل البرمجة الخطية العددية

سنستعرض في هذه الفقرة طريقتين أساسيتين وبسيطتين لحل مسائل "البرمجة الخطية العددية" هما "طرق التعداد" و "طريقة مستوي القطع".

(٢,٤,١) طرق التعداد

وتنقسم هذه الطرق إلى قسمين هما "طريقة التعداد الشامل" و "طريقة التعداد الضمني".

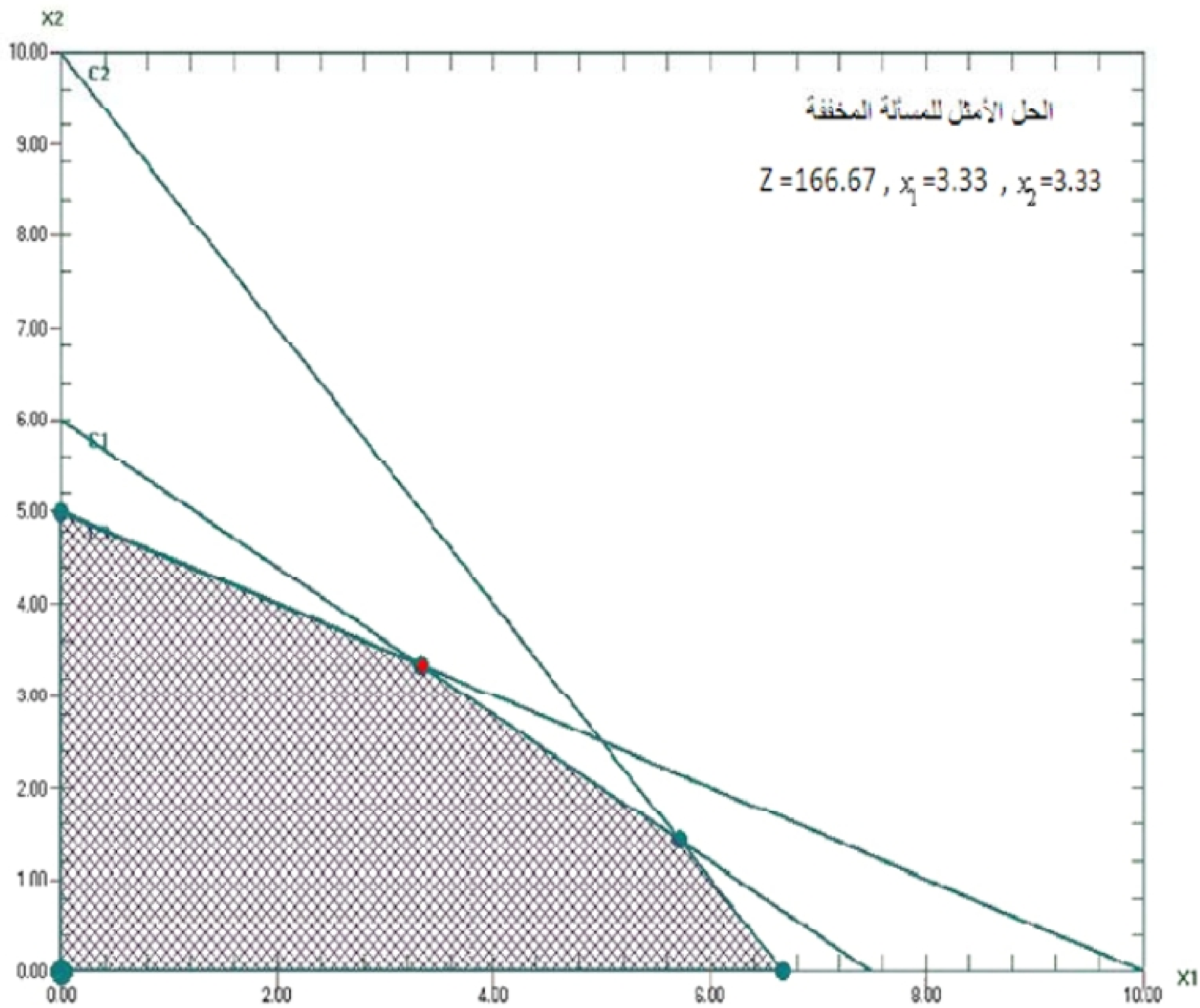
(٢,٤,١,١) طريقة التعداد الشامل

كما هو واضح من اسمها فإننا في هذه الطريقة نقوم بعملية تعداد تفصيلي وشامل لكافة الحلول الممكنة وحساب قيمة دالة الهدف عند كل حل ومن ثم مقارنة القيم الناتجة لنتمكن بعدها من اختيار الحل الأمثل. وسنوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (٢,٦)

بالعودة إلى مثال (٢,١) الخاص بعدد المشاريع البحثية الواجب إنجازها لكل من "الأدوية" و"المنتج النباتي" فإن فضاء الحل "للمسألة المخففة" معطى كما في الشكل رقم (٢,١). ومن هذا الشكل نجد أن القيم العددية الصحيحة الممكنة ل x_1 و x_2 هي $x_1 = 0,...,6$ و $x_2 = 0,...,5$. إذاً يوجد لدينا 7×6=42 حلا ممكنا (من الناحية النظرية) "للمسألة الأصلية". إلا أن بعض هذه الحلول لا يحقق واحد أو أكثر من قيود هذه المسألة. لذا فقد قمنا بتمثيل الحلول الفعلية الممكنة بنقاط كما في الشكل رقم (٢,٢) (انظر كذلك الجدول رقم ٢,٤) حيث أشرنا لذلك بنقاط في الحقول المقابلة). أما قيم دالة الهدف Z المقابلة لهذه الحلول فهي معطاة في الجدول رقم (٢,٤) وأكبرها 160

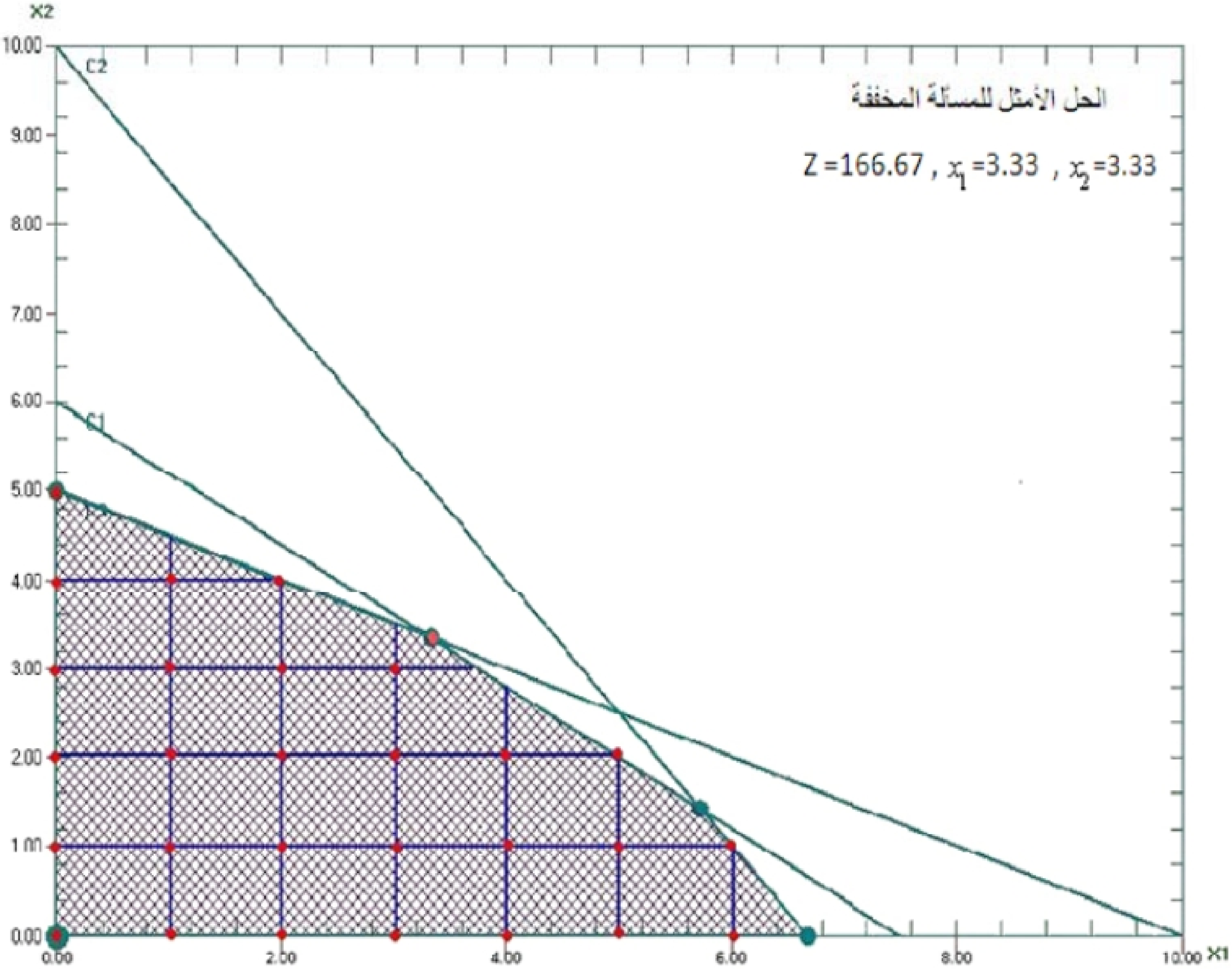
يقابل كلا من الحلين ($x_1 = 5$ ، $x_2 = 2$) و ($x_1 = 2$ ، $x_2 = 4$). فكل من هذين الحلين هو حل أمثلي "للمسألة الأصلية".



الشكل رقم (٢,١).

الجدول رقم (٢,٤). القيم الممكنة لمتغيرات المثال (٢,٦) وقيم دالة الهدف عند كل منها.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	20	40	60	80	100	120
1	30	50	70	90	110	130	150
2	60	80	100	120	140	**160**	-
3	90	110	130	150	-	-	-
4	120	140	**160**	-	-	-	-
5	150	-	-	-	-	-	-



الشكل رقم (٢,٢).

وكما نعلم فإن إيجاد مثل هذا الرسم البياني غير ممكن عندما يكون عدد متغيرات المسألة أكثر من اثنين. وفي الحقيقة فإنه يمكن إيجاد كل القيم الممكنة لمتغيرات المسألة الأصلية بمتغيرين أو أكثر بعملية مسح شامل لكافة القيم التي تحقق قيود "المسألة الأصلية".

ففي مثالنا مثلا يمكننا الوصول إلى ما نريد كما يلي:

١- نضع $x_1 = 0$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 6$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 10$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 5$.

٢- نضع $x_1 = 1$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 5.2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 8.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 4.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 4$.

٣- نضع $x_1 = 2$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 4.4$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 7$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 4$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 4$.

٤- نضع $x_1 = 3$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 3.6$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 7$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 3.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 3$.

٥- نضع $x_1 = 4$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 2.8$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 4$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 3$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 2$.

٦- نضع $x_1 = 5$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 2.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 2.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 2$.

٧- نضع $x_1 = 6$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 1.2$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq 1$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 2$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq 1$.

٨- نضع $x_1 = 7$ فنلاحظ أن القيد الأول يقتضي أن $x_2 \leq 0.4$ وأن القيد الثاني يقتضي أن $x_2 \leq -0.5$ وأن القيد الثالث يقتضي أن $x_2 \leq 1.5$. وعندها نأخذ المتراجحة التي تحقق كافة هذه الاقتضاءات وهي $x_2 \leq -0.5$. وهذه المتراجحة غير ممكنة الأمر الذي يدل على أن أية قيمة صحيحة ل x_1 أكبر من 6 ستؤدي إلى متراجحة غير ممكنة أيضا.

ومـن ذلـك نـستنتج أن القـيم العدديـة الـصحيحة لكـل مـن x_1 و x_2 هـي $x_1 = 0,...,6$ و $x_2 = 0,...,5$. وبطريقـة مماثلـة، يمكننـا الوصـول إلى القـيم العدديـة الصحيحة الممكنة أعلاه بتغيير قيم x_2 واستنتاج قيم x_1 المقابلة.

يتـضح مـن المثـال (٢,٦) أن الوقـت والجهـد اللازمـين لإيجـاد القـيم العدديـة الصحيحة والممكنة لمتغيرات مسألة "برمجة خطية عددية" سيزداد بشكل عام بازدياد عدد متغيرات هذه المسألة وينقص بنقصانها.

ويظهر ذلك جليا في ما أسميناه مسائل "البرمجة الخطية العددية بمتغيرات ثنائية القيم" بشكل خاص حيث تأخذ المتغيرات إحدى القيمتين 0 أو 1 كما هو موضح في المثال التالي:

مثال (٢,٧)

ترغب شركة لتوريد الأطعمة السريعة ببناء مخزنين لها في إحدى المدن الرئيسة وقد تقدم لها اثنين من المقاولين بعروض أسعار (بآلاف الريالات) لبناء هذين المخزنين كما هي معطاة في الجدول رقم (٢,٥).

الجدول رقم (٢,٥). بيانات المثال(٢,٧).

المخازن	المقاول (١)	المقاول (٢)
1	319.875	330.375
2	295.875	290.250

ولكسب الزمن فقد قررت الشركة أن تكلف كل مقاول ببناء واحد فقط من المخزنين. المطلوب صياغة هذه المسألة وتحديد كافة حلولها الممكنة والمثلى.

الحل

من الواضح أن قرار الشركة بالنسبة لأي من المقاولين وبخصوص أي من المخزنين هو أن تكلف هذا المقاول ببناء هذا المخزن أو ألا تكلفه بهذا البناء. ولذلك فإن متغيرات هذه المسألة هي متغيرات ثنائية القيم.

لنعرف هذه المتغيرات x_{ij} كما يلي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{إذا تم تكليف المقاول } i \text{ ببناء المخزن } j \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المشكلة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = 319.875x_{11} + 330.375x_{12} + 295.875x_{21} + 290.250x_{22}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} = 1$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} = 0,1$$

لنستعرض الآن كافة الحلول الممكنة بطريقة مماثلة لما عملناه في المثال السابق فنجد ما يلي:

١- نضع $x_{11}=0$ عندئذ فإن القيد الأول يقتضي أن $x_{12}=0$ ويقتضي القيد الثالث أن $x_{21}=0$ وعندئذ فإن أيا من القيدين الثاني أو الرابع يقتضي أن $x_{22}=0$. فالحل الأول الممكن للمسألة هو (0.1.1.0) وقيمته $Z=626.25$.

٢- نضع $x_{11}=1$ عندئذ فإن القيد الأول يقتضي أن $x_{12}=0$ ويقتضي القيد الثالث أن $x_{21}=0$ وعندئذ فإن أيا من القيدين الثاني أو الرابع يقتضي أن $x_{22}=1$. فالحل الثاني الممكن للمسألة هو (1.0.0.1) وقيمته $Z=610.125$.

وبما أن المسألة هي مسألة تصغير فإن الحل (1.0.0.1) هو الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

(٢,٤,١,٢) طريقة التعداد الضمني

إن استخدام طريقة التعداد الشامل يبقى معقولا إذا كان العدد الكلي للحلول الممكنة "للمسألة الأصلية" هو عدد صغير نسبيا. إلا أن تطبيق هذه الطريقة يصبح غير ممكن من الناحية العملية إذا كان هذا العدد كبيرا. فمثلا ، لو كان لدينا مسألة "برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم" فيها 40 متغير لكان العدد الكلي للحلول الممكنة من الناحية النظرية مساويا 2^{40} وهو عدد كبير جدا. ومع أنه يمكن إنقاص هذا العدد لدرجة كبيرة باستخدام قيود المسألة (كما رأينا في المثال الأخير) إلا ان هذا العدد سيبقى كبيراً نسبيا. ومن الطرق التي تُجنبنا التعامل مع كافة الحلول هي "طريقة التعداد الضمني Implicit Enumeration Method". وتستخدم هذه الطريقة عدة أساليب لاستبعاد بعض الحلول. وسنوضح ذلك بالمثال التالي.

مثال (٢,٨)

بالعودة إلى مثال (٢,٥) والذي نورده ثانية لتسهيل متابعة ما سنقوم به من تحليلات.
كبر الدالة :

$$Z = -2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$9x_1 - 3x_2 \geq 11$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

سنوضح فيما يلي وسنستعرض بعض الطرق التي تستبعد بعض الحلول من أن تكون مرشحة كحل ممكن أو كحل أمثلي.

أ) الاستبعاد عن طريق إيجاد حدود لتحولات المتغيرات

باستخدام القيد الثاني والخامس نجد أن $10 \leq x_1 \leq 0$ و $5 \leq x_2 \leq 0$ فعدد الحلول الممكنة هو 66 حلا. ولكن عندما $x_2 = 0$ فإن القيد الأول يقتضي $x_1 \geq 2$.
وعندما $x_2 = 5$ فإن القيد الثالث يقتضي $x_1 \leq 6$.
فنكون بذلك قد أنقصنا عدد الحلول إلى 30 حل.

ب) الاستبعاد عن طريق عمل توفيقات خطية من القيود

بجمع القيد الثاني والثالث نحصل على القيد $3x_1 + x_2 \le 17$. وعندما $x_2 = 0$ نجد أن $3x_1 \le 17$ ومنها $x_1 \le 5$. ولو ضربنا القيد الأول ب (-1) والقيد الثاني ب 4 وجمعنا الناتج لحصلنا على القيد $9x_2 \le 35$ والذي ينتج عنه $x_2 \le 3$. فنكون بذلك قد أنقصنا عدد الحلول إلى 16 حل.

ج) الاستبعاد عن طريق إيجاد حدود لقيم دالة الهدف

إن أخر ما وصلنا إليه هو $0 \le x_2 \le 3$ و $2 \le x_2 \le 5$. فلو أخذنا أحد هذه الحلول، مثلا لو أخذنا الحل $x_1 = 2, x_2 = 3$ لكان $Z = -4$. لذا يجب أن يكون $-2x_1 + x_2 \ge -4$ وبما أن $x_2 \le 3$ فإن $2x_1 \le 7$ وبالتالي $x_1 \le 3$. فعدد الحلول قد نقص إلى 8 حلول فقط وهي مجموعة الحلول التالية $F_1 = \{(x_1, x_2): x_1 = 2,3 \;\; ; x_2 = 0,1,2,3\}$. كذلك فإن كلا من الحلين (3.1) و(3.0) مستبعدان؛ لأن قيمة دالة الهدف عند كل منهما أقل من -4. وبذلك ينقص عدد الحلول إلى 6.

د) الاستبعاد عن طريق استخدام القيمة المثلى لدالة الهدف " للمسألة المخففة "

كما وجدنا سابقاً فإن القيمة المثلى لدالة الهدف "للمسألة المخففة" هي $Z = -1\frac{4}{21}$ لذا يجب أن يكون $-2x_1 + x_2 \le -2$ " للمسألة الأصلية " أي $Z \le -2$. ولذا يمكننا استبعاد الحل (2.3). يبقى لدينا إذاً مجموعة من 5 حلول فقط هي $F_2 = \{(2,0),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}$ وعندها نجد أن قيم دالة الهدف Z هي $-4,-3,-2,-4,-3$ على التوالي. وبذلك يكون الحل الأمثل هو $(2,2)$ وقيمته $Z = -2$.

(٢,٤,٢) طريقة مستوي القطع

وتعتبر هذه الطريقة أحد أهم الطرق المستخدمة في حل مسائل "البرمجة الخطية العددية". فوفقاً لهذه الطريقة، نقوم أولا بحل ما أسميناه "المسألة المخففة" فإذا كان الحل الأمثل الناتج لها هو أعداد صحيحة نتوقف وعندئذ يكون هذا الحل هو الحل الأمثل

"للمسألة الأصلية". أما إذا كان الحل الأمثل الناتج "للمسألة المخففة" غير ذلك (أي أن قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات هو عدد غير صحيح) فإننا نضيف قيدا جديدا نسميه "مستوي قطع Cutting Plane " بحيث إن هذه الإضافة تسقط أو تعزل الحل الأمثل " للمسألة المخففة" لكنها تحافظ على جميع الحلول الممكنة "للمسألة الأصلية" ونسمي المسألة الناتجة باسم "المسألة المعدلة Modified Problem ". بعد ذلك نقوم بإعادة حل المسألة المخففة "للمسألة المعدلة" بعد إضافة "مستوى قطع" ونكرر العمل حتى نصل إلى حل تكون فيه كافة قيم المتغيرات أعداداً صحيحة فيكون هذا الحل هو حل أمثل "للمسألة الأصلية". ولتوضيح هذه الطريقة نسوق المثال البسيط التالي:

مثال (٢,٩)

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 23$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1, x_2 أعداد صحيحة

المطلوب إيجاد الحل الأمثل بطريقة مستوي القطع.

الحل

إن فضاء الحل للمسألة المخففة معطى كما في الشكل رقم (٢,٣). ومنه نجد أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو النقطة $\left(x_1 = 0, x_2 = 5\frac{3}{4}\right)$ وقيمته Z=172.5. ومن فضاء

الحل للمسألة المخففة نجد أن فضاء الحل للمسألة الأصلية معطى كما في الشكل رقم (٢،٤) ومنه نستنتج أن $x_2 \leq 5$. فلو أضفنا مستوي القطع $x_2 = 5$ لأصبحت المسألة المعدلة كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 30x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 23$$

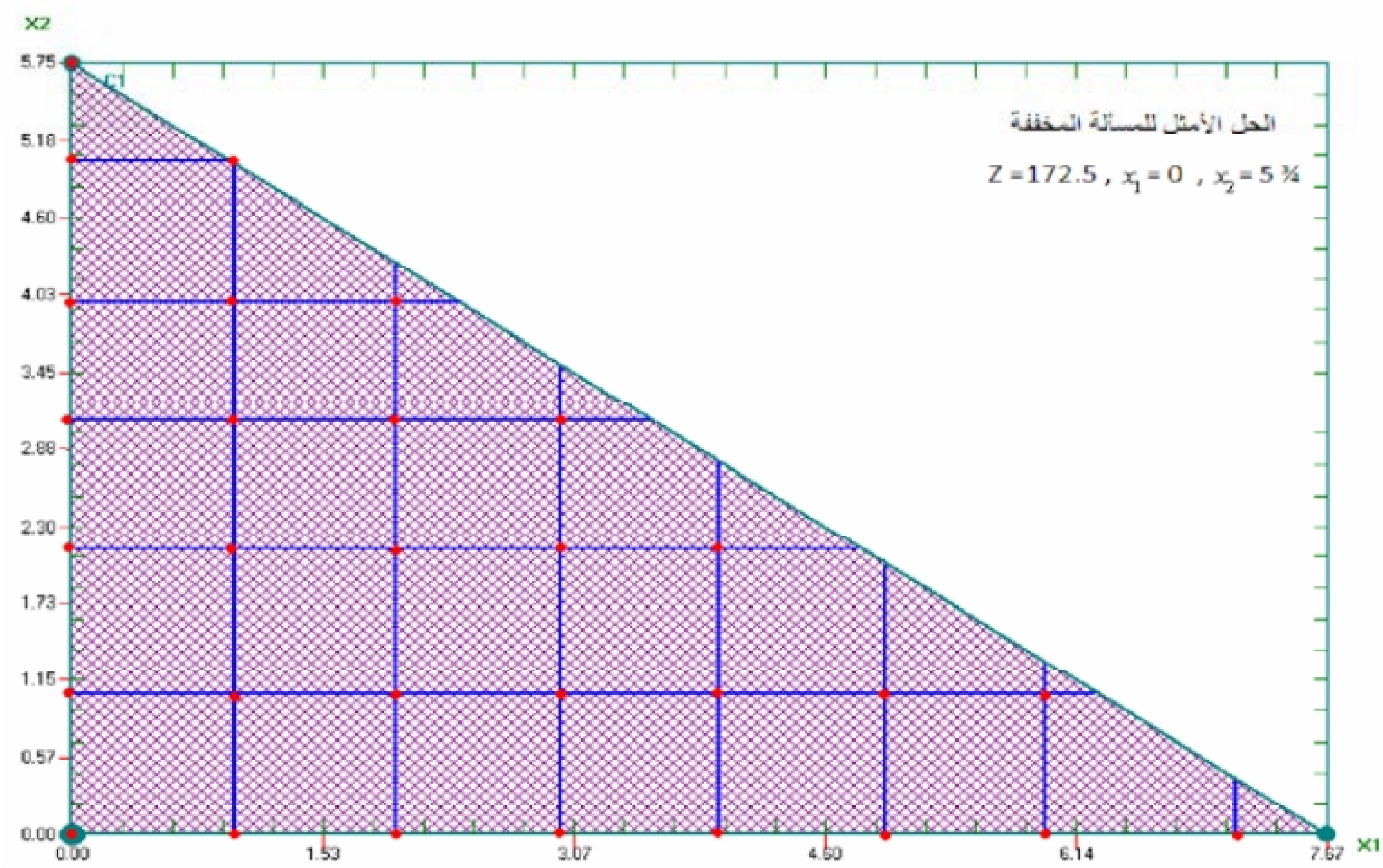
$$x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

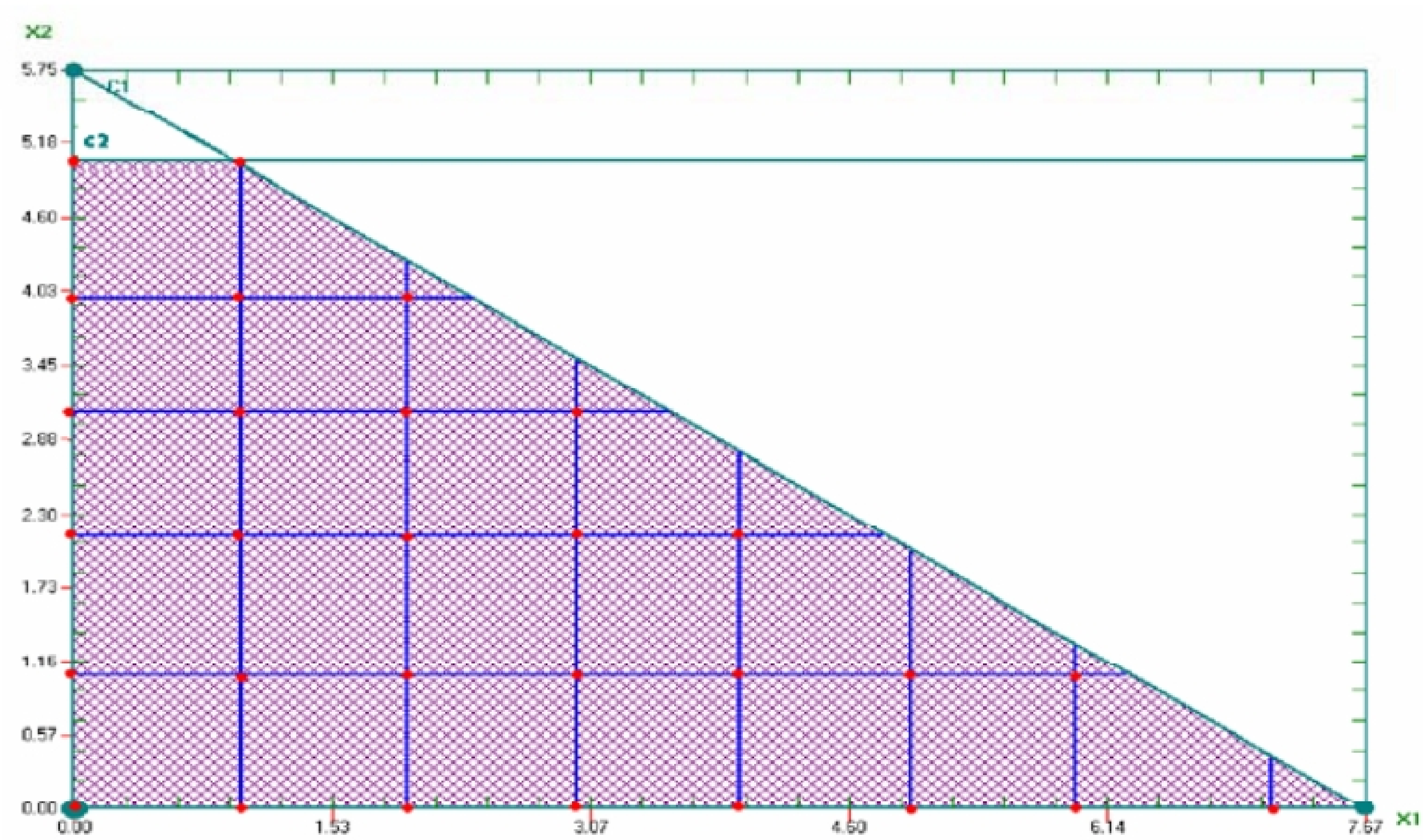
x_1, x_2 أعداد صحيحة

ويمكننا التحقق من أن الحل الأمثل للمسألة المخففة للمسألة المعدلة هو $(x_1 = 1, x_2 = 5)$. ونظرا لأن هذا الحل يحقق المطلوب فهو الحل الأمثل للمسألة الأصلية وقيمته $Z = 170$.

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة قد تستغرق وقتا وجهدا كبيرين في المسائل الأكثر تعقيدا كتلك التي تملك قيودا و/أو متغيرات كثيرة. ولذا فإن طرق التعداد الضمني هي الأكثر فاعلية في مثل هذه الحالات.



الشكل رقم (٣,٢).



الشكل رقم (٤,٢).

(٢,٥) تمارين (٢)

١- صنف المسائل التالية من حيث كونها مسألة "*برمجة خطية عددية صرفة*" أو مسألة "*برمجة خطية عددية مختلطة*" أو مسألة "*برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم*" أو مسألة "*برمجة خطية*".

(أ) كبر الدالة:

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$4x_1 + x_2 \le 50$$

$$x_1, x_2 = 0,1$$

(ب) صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

x_1 عدد صحيح

(ج) صغر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 + 3x_2 \geq 40$$

$$6x_1 + 2x_2 \geq 30$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

(د) كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 7x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$8x_1 + 9x_2 \leq 100$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

٢- تقوم شركة بتجميع نوعين من السيارات بطريقة تمرير القطع المتنوعة لهذه السيارات على أربع مكائن لتجميع القطع المختلفة لكل نوع. تحتاج كل سيارة من نوعي السيارات إلى عدد من الساعات على كل من المكائن الأربع التي يتوافر لكل منها عددا معينا من ساعات العمل البشري في الشهر. البيانات معطاة في الجدول رقم (٢,٦). قدرت الشركة أنها ستربح 6 آلاف ريال لكل سيارة من أي من النوعين وترغب الشركة بمعرفة عدد السيارات التي ستنتجها من كل نوع في الشهر بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الجدول رقم (٢,٦).

المكائن	احتياج السيارة من ساعات العمل البشري النوع (1)	احتياج السيارة من ساعات العمل البشري النوع (2)	المتوافر من ساعات العمل من القوى البشرية شهريا
A	200	500	3400
B	100	200	1450
C	200	300	2000
D	400	100	2400

٣- تقوم شركة بإنتاج نوعين من المنتجات عبر أربعة أقسام. تحتاج كل وحدة من نوعي المنتجات إلى عدد من الساعات في كل من الأقسام الأربعة التي يتوافر لكل منها عددا معينا من ساعات العمل البشري في الشهر. البيانات معطاة في الجدول رقم (٢,٧). قدرت الشركة أنها ستربح 8 آلاف ريال لكل وحدة من المنتج (1) و12 ألف ريال لكل وحدة من المنتج (2). ولأسباب تتعلق بطبيعة المنتج (1) فإنه لابد من إنتاج عدد صحيح من الوحدات منه، بينما يمكن إنتاج أي عدد من المنتج (2). ترغب الشركة بمعرفة عدد الوحدات التي ستنتجها من كل نوع في الشهر بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الجدول رقم (٢,٧).

الأقسام	احتياج المنتج من ساعات العمل البشري المنتج (1)	المنتج (2)	المتوافر من ساعات العمل من القوى البشرية شهريا
1	400	200	3700
2	300	200	3000
3	100	200	1700
4	200	500	4100

٤- ترغب شركة مقاولات بتعهد بعض المشاريع من بين أربعة مشاريع معروضة، لكل منها تكلفته الخاصة وربح متوقع به كما هو معطى في الجدول رقم (٢,٨).

الجدول رقم (٢,٨).

المشروع	1	2	3	4
التكلفة بملايين الريالات	1.8	2.6	2.1	3.0
الربح المتوقع بملايين الريالات	3.4	5.3	3.7	6.0

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع الواجب تعهدها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. المطلوب صياغة هذه المسألة وإيجاد الحل الأمثل للشركة إذا علمت أنه يتوافر للشركة 4.8 ملايين ريال فقط لإنفاقها على المشاريع التي ستتعهدها.

٥- ترغب إحدى وزارات الدولة بتطوير ثلاثة مشاريع قائمة خلال مدة 3 سنوات، ولكل منها تكلفته السنوية الخاصة ولكل سنة ميزانيتها الخاصة المرصودة لهذا الغرض كما هو معطى في الجدول رقم (٢,٩). (الأرقام بملايين الريالات)

الجدول رقم (٢,٩).

المشروع	السنة (1)	السنة (2)	السنة (3)
1	1.8	2.0	2.2
2	2.4	2.1	2.0
3	2.1	2.3	4.7
المبلغ المرصود للتطوير	4.6	4.6	4.7

ترغب الشركة بمعرفة المشاريع الواجب تطويرها بحيث يحقق لها ذلك أكبر ربح ممكن. إذا علمت أن الأرباح المتوقعة من تطوير المشاريع (1)، (2)، (3) هي 800000، 700000، 850000 على الترتيب فالمطلوب.

أ) صياغة هذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم ثم إيجاد حلها الأمثل.

ب) اكتب المسألة المخففة لهذه المسألة.

٦- يتوافر لمدير الإعلانات في إحدى الشركات أربع فرص للإعلان وهي: في الفضائيات، في المذياع، في الصحف، وفي المجلات. لكل من هذه الفرص تكاليفها (بمئات الآلاف من الريالات) الخاصة بها كما أن لكل منها عددا متوقعا (بالملايين) من الناس الذين يصل إليهم الإعلان حسبما هو مبين في الجدول رقم (٢,١٠). يتوافر لمدير الإعلانات ميزانية قدرها مليون ريال ويرغب في اختيار وسائل الإعلان المناسبة والتي من شأنها أن تجعل العدد الكلي من الناس الذين تصل إليهم وسيلة الإعلان أكبر ما يمكن. المطلوب إيجاد السياسة المثلى للإعلان الواجب على المدير إتباعها.

الجدول رقم (٢,١٠).

	الفضائيات	المذياع	الصحف	المجلات
التكلفة	4.7	3.4	2.5	2.8
العدد المتوقع من الناس الذين تصل إليهم وسيلة الإعلان	2.5	1.8	1.3	1.4

٧- لديك مسائل البرمجة الخطية العددية التالية:

(أ) كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 + 3x_2$$

وفقا للقيود:

$$12x_1 + 16x_2 \leq 71$$

$$4x_1 \geq 13$$

$$2x_2 \geq 7$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(ب) كبر الدالة:

$$Z = 4x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 = 5$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(ج) كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$-2x_1 + 2x_2 \leq 1$$

$$16x_1 - 14x_2 \leq 7$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(د) كبر الدالة :

$$Z = -4x_1 + 6x_2$$

وفقا للقيود :

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

$$3x_1 + x_2 \leq 15$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

المطلوب لكل مسألة ما يلي :

أ) رسم فضاء الحل للمسألة المخففة ومن ثم تحديد الحل الأمثل بيانيا (من الرسم).

ب) رسم فضاء الحل للمسألة الأصلية.

ج) تحديد جميع الحلول الممكنة للمسألة الأصلية دون استخدام الرسم الذي حصلت عليه في (٢).

د) تحديد الحل الأمثل وقيمته للمسألة الأصلية ومقارنته بالحل الأمثل وقيمته للمسألة المخففة.

ماذا تلاحظ ؟

٨- لديك مسألة البرمجة الخطية العددية التالية

(أ) كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$12x_1 + 16x_2 \leq 71$$

$$x_1 \leq 1.5$$

$$x_2 \le 1$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

(أ) هل $x_1 \le 1.25$ هو مستوى قطع ملائم؟

(ب) هل $x_1 \le 0.5$ هو مستوى قطع ملائم؟

برر إجابتك في الحالتين.

الفصل الثالث

النماذج البسيطة

(٣,١) مقدمة

كما أشرنا في مطلع الفصل الثاني فإننا نواجه في الحياة العملية العديد من المسائل التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيماً غير صحيحة والتي أطلقنا عليها اسم مسائل "برمجة عددية Integer Programming اختصاراً IP". وتغطي مثل هذه المسائل عددا كبيرا من التطبيقات التي عادة ما نواجهها في حياتنا الفعلية. ومن أمثلة ذلك توزيع البضائع من المصانع إلى المستودعات أو العكس حيث لا يمكن الحديث عن جزء من وحدة من هذه البضائع ، مسائل إيجاد أقصر مسار في شبكة (Network) ما كشبكات الطرق والتي تكون طبيعة المتغيرات فيها أعدادا صحيحة ، مسائل إيجاد عدد الوحدات الواجب تصنيعها من أصناف معينة من المنتجات والتي تتصف بأنها غير قابلة للتجزئة ، وكذلك العديد من مسائل التسلسل والجدولة التي عادة ما نختار فيها التسلسل الأمثل لجدولة وتنفيذ الأعمال المختلفة. وكما أشرنا في الفصل الثاني أيضا فإننا نواجه العديد من المسائل الواقعية التي يتسم القرار فيها بنعم أو لا ، افعل أو لا تفعل ، خصص أو لا تخصص ، نفذ أو لا تنفذ... إلخ والتي نستخدم فيها ما أسميناه المتغيرات الثنائية القيم 1 و0. وسنستعرض في هذا الفصل بعض نماذج "البرمجة العددية البسيطة" وسيكون اهتمامنا فيه مركزا على صياغة هذه النماذج وفقا لطبيعة شروطها ومتغيراتها وقيودها.

(٣,٢) الصياغات الخاصة لبعض مسائل البرمجة العددية

سنتعرف في هذه الفقرة على كيفية الاستفادة من المتغيرات الثنائية القيم 1 و 0 في صياغة بعض مسائل البرمجة العددية وخاصة ذات الطبيعة الخاصة منها.

(٣,٢,١) استخدام المتغيرات الثنائية القيم في القيود المنطقية

كما سنرى لاحقاً يمكن في بعض الحالات استخدام المتغيرات الثنائية القيم للتعبير عن علاقات متداخلة بين واحد أو أكثر من المتغيرات الأساسية للمسألة الأصلية. وقبل أن نستعرض بعضا منها دعنا نقوم أولاً بتعريف المتغيرات الثنائية القيم التالية كمجموعة جزئية من مجموعة متغيرات المسألة قيد الدراسة.

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 0,1,\cdots,n$$

لنفرض أن k ثابت صحيح عندئذٍ نجد وبشكل عام أن كثيرا من متطلبات البرمجة الرياضية (ومنها البرمجة العددية) يمكن التعبير عنها كقيود باستخدام المتغيرات الثنائية القيم ومن الأمثلة التي تستخدم فيها مثل هذه المتغيرات ما يلي :

(٣,٢,١,١) القيود ذات الشروط

ومن أمثلتها ما يلي ، لنفرض أن

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا اتخذ القرار } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ

- لو أردنا الإفادة بأن واحدا على الأكثر من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \le 1$$

- لو أردنا الإفادة بأن k على الأكثر من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq k$$

- لو أردنا الإفادة بأن k على الأقل من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد التالي

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq k$$

- لو أردنا الإفادة بأن k بالضبط من n من القرارات هو الذي سيقع لأمكننا التعبير عن ذلك بالقيد

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k$$

(٣,٢,١,٢) القيود الإقتضائية بالمتغيرات الثنائية القيم

فيما يلي سنفترض أن w هو أحد المتغيرات الثنائية القيم التي تمثل قرارا يمكن أن يقع إذا وقعت بعض القرارات الأخرى ذات الصلة به.

- فلو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذ أي من المتغيرات الأخرى القيمة 1، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq nw$$

- ولو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذ ت جميع المتغيرات الأخرى القيمة 1، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq n - 1 + w$$

• ولو أردنا القول بأن w سيقع إذا أخذت k على الأقل من المتغيرات الأخرى القيمة 1، عندئذ يمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي:

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq (k-1) + [n-(k-1)]w$$

(٣,٢,١,٣) القيود الإقتضائية بالمتغيرات الحقيقية

لنفرض أن y هو أحد المتغيرات الثنائية القيم التي تمثل قرار بناء أو عدم بناء منشأة معينة و x هو عدد حقيقي يمثل عدد الوحدات التي يمكن أن تنتجها هذه المنشأة، عندئذ يمكن التعبير عن هذه الحالة بالقيد التالي:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x > 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x = 0 \end{cases}$$

وإذا أردنا أن نقصر قيم المتغير x لتكون 0 ما لم تكن قيمة y هي 1 لأمكن التعبير عن ذلك بالقيد التالي:

$$x \leq My$$

حيث تمثل M حداً أعلى للمتغير x.

(٣,٢,١,٤) القيود البديلة

نصادف أحيانا مسائل فيها نوع من التضاد (Dichotomy) في تحقق القيود، كأن تكون الحالة "إما أن يتحقق هذا القيد أو أن يتحقق ذاك القيد" والتي سنصفها بالحالة " إما – أو ". فمثلا لو كان x هو عدد الوحدات المنتجة من منتج معين و كانت ظروف شركة إنتاجية تقتضي إما أن تنتج مالا يزيد عن 100 وحدة أو مالا يقل عن 1000 وحدة من هذا المنتج لأمكن التعبير عن ذلك بالقيد إما $x \leq 100$ أو $x \geq 1000$. ويعبر هذا القيد عن حالة واضحة من التضاد حيث لا يمكن وقوع الحالتين معا. وكما نعلم فإن

وجود قيد من الشكل (إما – أو) سيخلق إشكالات كثيرة يتعلق بعضها بتحديد فضاء الحل ويتعلق بعضها الآخر بطرق الحل نفسها. لذا لابد لنا من الاستعاضة عن مثل هذا القيد بقيود يمكن التعامل معها. وفي حالتنا هذه نجد أنه يمكن الاستعاضة عن مثل هذا القيد بالقيود التالية :

$$x \leq My$$

$$x \leq 100y$$

$$x \geq 1000y$$

$$y = 1 \text{ أو } 0$$

حيث M قيمة كبيرة تمثل حداً أعلى لقيم x. و من الواضح هنا أنه إذا كان $y = 0$ فإن $x = 0$ أما إذا كان $y = 1$ فإن أحد القيدين $x \leq 100$ ، $x \geq 1000$ فقط يتحقق دون أن يتحقق الآخر.

أما لو أردنا أن نعبر عن حالة يمكن أن يتحقق فيها واحد على الأقل من القيدين التاليين :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \leq 0$$

لأمكن التعبير عن ذلك بالقيدين التاليين :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M(1-y)$$

حيث y هو متغير ثنائي القيم و M هي عدد كبير بشكل كاف بحيث يسمح بتحقق القيدين التاليين معا :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My \quad \text{و} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

(٣,٢,١,٥) القيود المقتضية لقيود أخرى

نحتاج أحيانا للتعبير عن أن القيد $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0$ يقتضي القيد $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ge 0$. ويمكننا التعبير عن مثل هذه الحالة كما يلي :

$$-g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le My$$

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M(1-y)$$

حيث y هو متغير ثنائي القيم و M هو عدد كبير بشكل كاف بحيث يسمح بتحقق القيدين التاليين معا :

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le -M \quad \text{و} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le M$$

المثال التالي يوضح بعض المفاهيم التي ذكرت سابقاً.

مثال (٣,١)

يرغب أحد أقسام التغذية أن يصنع مزيجاً من الطعام مكون من أربع أنواع من العناصر الغذائية A,B,C,D التي تناسب الحمية لبعض المرضى المصابين بالبدانة. وقد

توافر لهذا القسم 6 منتجات مرشحة لأن تدخل في تركيبة هذا المزيج. ولأسباب تتعلق بتخفيض التكاليف فقد قرر القسم أن يستخدم 3 فقط من هذه المنتجات في صناعة هذا المزيج. الجدول رقم (٣,١) يبين كافة المعلومات المتعلقة بالمسألة.

الجدول رقم (٣,١). بيانات المثال (٣,١).

العناصر الغذائية	مقدار ما تحويه الأونصة من العنصر الغذائي من المنتجات						الحد الأدنى المطلوب (أونصة)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
A	.2	.1	.3	.1	.2	.3	10
B	.2	.3	.3	.1	.1	.1	12
C	.3	.3	.2	.2	.2	.4	15
D	.4	.3	.4	.2	.5	.3	20
تكلفة الأونصة (هللة)	10	9	11	7	9	12	

يهدف القسم إلى معرفة ما يجب استخدامه من كل من المنتجات الستة في صناعة الوحدة من المزيج والتي تؤدي إلى تخفيض تكلفة صناعة الوحدة من هذا المزيج والمطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار هي الكميات الواجب استخدامها من المنتجات الستة في كل المزيج. لنعرف هذه المتغيرات كما يلي:

$x_i =$ كمية المنتج i المستخدمة في المزيج

ولتحقيق المتطلب بأن 3 فقط من المنتجات الستة ستستخدم في المزيج لابد لنا من استخدام المتغيرات الثنائية القيم والتي نعرفها كما يلي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا استخدم المنتج } i \text{ في المزيج} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

صغر الدالة:

$$Z = 10x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 7x_4 + 9x_5 + 12x_6$$

وفقا للقيود:

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 + 0.3x_6 \geq 10$$

$$0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.3x_3 + 0.1x_4 + 0.1x_5 + 0.1x_6 \geq 12$$

$$0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 + 0.2x_4 + 0.2x_5 + 0.4x_6 \geq 15$$

$$0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 0.2x_4 + 0.5x_5 + 0.3x_6 \geq 20$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 \leq 3$$

$$x_i \leq M_i y_i, \quad i = 1, \cdots 6$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, 6 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, 6$$

لاحظ أن القيود الأربعة الأولى تضمن استخدام الحد الأدنى من العناصر الغذائية A,B,C,D في المزيج ، ويعبر القيد الخامس عن أن 3 فقط من المنتجات الستة ستستخدم في صناعة المزيج وهذا القيد هو أحد القيود الاقتضائية التي سبق ذكرها أعلاه. أما القيد السادس فهو عبارة عن ستة قيود اقتضائية بالمتغيرات الحقيقية ، حيث $(i=1,\cdots 6)$ M_i هو عدد يتم اختياره كبيراً بشكل كاف بحيث يصبح القيد المقابل غير ذي صلة (Nonbinding) عندما يكون المتغير الثنائي القيم المقابل مساويا للواحد، أي إذا كان $y_i = 1$ فإن $x_i \le M_i y_i$ والتي تعبر عن أن القيد المقابل يصبح غير ذي صلة ؛ لأن هذا القيد محقق دوما باعتبار أنه تم اختيار M_i المقابلة كبيرة بشكل كاف منذ البداية. أما عندما يكون $y_i = 0$ فإن $x_i = 0$ والذي يعني عدم استخدام المنتج i في صناعة المزيج. ولو عدنا إلى البيانات في الجدول رقم (٣,١) لاستطعنا أن نستنتج أنه من أجل المنتج (١) مثلاً فإن الكمية المستخدمة منه لا يمكن أن تتجاوز أكبر القيم 10/.2 ، 12/.2 ، 15/.3 ، 20/.4 والتي تساوي *60* . أي أن $M_1 = 60$. وبطريقة مماثلة نجد أن $M_2 = 100$ ، $M_3 = 75$ ، $M_4 = 120$ ، $M_5 = 120$ ، و $M_6 = 10$.

ويمكننا التحقق (انظر الباب الثاني من الكتاب) أن الحل الأمثل لهذا النموذج هو:

$$x_1^* = 37.5, x_2^* = 10, x_3^* = 5, y_1^* = y_2^* = y_3^* = 1$$

وقيمته $Z^* = 520$. ويعني ذلك أن علينا أن نستخدم المنتجات (1) و(2) و(3) فقط في المزيج.

مثال (٣,٢)

لنفرض أن لدينا البرنامج التالي لجدولة الإنتاج في إحدى المنشئات الإنتاجية كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود:

$$10x_1 + 12x_2 \leq 10000$$

$$15x_1 + 12x_2 \leq 12000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ولو افترضنا أن x_2 يمثل عدد الوحدات الواجب إنتاجها من إحدى السلع وأن الجدوى الإقتصادية تقتضي أن يتم إنتاج هذه السلعة بكميات لا تقل عن 100 وحدة أو ألا يتم إنتاجها إطلاقا، عندئذ لابد من إدخال ما أسميناه القيد (إما – أو) وهو:

إما $x_2 = 0$ أو $x_2 \geq 100$

وهو قيد يتعارض في شقه الثاني ($x_2 \geq 100$) مع القيد الأول للمسألة. وكما أشرنا سابقاً فإنه يمكن الاستعاضة عن مثل هذا القيد بالقيود التالية:

$$x_2 \leq My$$

$$x_2 \geq 100y$$

$y = 1$ أو 0

حيث M هو مقدار كبير بشكل كاف. فإذا كان $y = 0$ فإن $x_2 = 0$ بموجب العلاقة الأولى وإذا كان $y = 1$ فإن x_2 يجب أن يأخذ قيمة لا تقل عن 100. وبذلك يصبح النموذج الرياضي للمثال كما يلي:

كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2$$

وفقا للقيود :

$$10x_1 + 12x_2 \le 10000$$

$$15x_1 + 12x_2 \le 12000$$

$$x_2 \le My$$

$$x_2 \ge 100y$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$y = 1$ أو 0

مثال (٣,٣)

في مسألة القرار المتعلقة بافتتاح معمل ما أو عدم افتتاحه نعرف المتغيرات التالية

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم افتتاح المعمل } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنفرض المعمل(2) يمكن افتتاحه إذا افتتح المعمل(5) عندئذ يكون لدينا القيد التالي :

$$y_2 \le y_5$$

ولو كان افتتاح المعملين (2) و(5) متلازما (أي أن أيا منهما لا يفتتح إلا بافتتاح الآخر) عندئذ يكون لدينا القيد التالي :

$$y_2 = y_5$$

(٣,٢,٢) التحويلات البسيطة

فيما يلي سنقدم بعض التحويلات البسيطة باستخدام المتغيرات الثنائية القيم.

(٣,٢,٢,١) تحويل مسألة برمجة خطية عددية إلى مسألة برمجة خطيـــة عدديـــة ذات متغيرات ثنائية القيم

مع أن وجود المتغيرات الثنائية القيم في المسألة قد يخلق مصاعب جمة في العمليات اللازمة لإتمام إيجاد الحل الأمثل للمسألة، إلا أنه (ومن الناحية النظرية على الأقل) يمكن استبدال أي متغير صحيح غير سالب x ومحدود من الأعلى بالعدد u (u ليس صحيحا بالضرورة) بمتغيرات ثنائية القيم كما يلي:

لنفرض أن t هو أصغر عدد صحيح يحقق القيد $2^{t+1} > u$ عندئذ يمكن إزالة x من المسألة بالتحويل التالي:

$$x = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \cdots + 2^t y_{t+1} = \sum_{j=0}^{t} 2^j y_{j+1} \le u \qquad (٣,١)$$

حيث

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,\cdots,t+1$$

$$2^t \le u < 2^{t+1}$$

(٣,٢,٢,٢) التعبير عن المتغيرات أو الدوال المنفصلة

إذا كان لدينا متغير x (أو دالة g) تأخذ قيما منفصلة غير متتابعة بالضرورة كأن يأخذ هذا المتغير (أو هذه الدالة) قيمه في المجموعة $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$ عندئذ يمكن استبدال هذا المتغير x (أو هذه الدالة g) بالعبارة التالية:

$$x(g)=d_1y_1+d_2y_2+\cdots+d_ry_r \qquad (٣,٢)$$

حيث

$$y_1+y_2+\cdots+y_r=1$$

وحيث

$$y_j=1 \text{ أو } 0, \quad j=1,2,\cdots,r$$

ويمكن هنا اعتبار $d_1,d_2,\cdots,d_r$ بمثابة أوزانٍ للمتغيرات الثنائية القيم $y_1,y_2,\cdots,y_r$ على الترتيب. لاحظ أنه عندما يكون $y_j=1$ فإن $x=d_j$. ولو كانت $D=\{0,1,2,\cdots,u\}$ لأمكن التعبير عن $x(g)$ بإحدى العلاقتين (٣,١) أو (٣,٢) مع أن العلاقة (٣,١) هي المفضلة في مثل هذه الحالة؛ لأنها تملك عددا أقل من المتغيرات. ولإيضاح هذه الحالة لنفرض أن x محدود ب $u=15$ عندئذ $t=3$؛ لأن $2^3\le u<2^4$ والتحويل الخطي المناسب هو $x=y_1+2y_2+4y_3+8y_4$.

(٣,٢,٢,٣) استخدام المتغيرات المتممة

نحتاج في بعض الخوارزميات لظهور المتغيرات الثنائية القيم بإشارة موجبة في دالة الهدف. ويمكننا تحقيق ذلك باستبدال المتغير الثنائي القيم y الذي يظهر بإشارة سالبة في هذه الدالة بالمتغير $1-y'$. ولنوضح هذه الحالة بالمثال التالي:

مثال (٣,٤)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية:

صغر الدالة:

$$Z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

المطلوب تحويلها بحيث تظهر جميع المتغيرات في دالة الهدف بأمثال موجبة.

الحل

نلاحظ أن المتغيرين x_1, x_4 فقط تظهر بأمثال سالبة، لذا نستبدلهما بالمتغيرين $x_1' = 1 - x_1, x_4' = 1 - x_4$ على الترتيب ثم نعوض عنهما حيثما وردا فنحصل على المسألة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = 2x_1' + 3x_2 + x_3 + x_4' - 3$$

وفقا للقيود:

$$-x_1' + 2x_2 - 3x_3 - x_4' \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 2, 3$$

$$x_j' = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,4$$

حيث نلاحظ تحقق المطلوب.

(٣,٢,٢,٤) تحويل مسألة برمجة غير خطية إلى مسألة برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم

إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ غير خطية لكنها مكونة من عدد من القطع المستقيمة التي تتقاطع في النقاط $b_1, b_2, \cdots, b_k$. فإذا كانت $b_k \le x \le b_{k+1}$ حيث $k = 1, 2, \cdots, n-1$ وكان z_k عددا بحيث $0 \le z_k < 1$ ، لأمكن التعبير عن x بالعلاقة التالية:

$$x = z_k b_k + (1 - z_k) b_{k+1}$$

ونظرا لأن $f(x)$ دالة خطية على الفترة $b_k \le x \le b_{k+1}$ فإن:

$$f(x) = z_k f(b_k) + (1 - z_k) f(b_{k+1})$$

وعندئذ يمكن تحويل الدالة $f(x)$ عبر الخطوتين التاليتين

خطوة (١). حيثما وردت الدالة $f(x)$ قم باستبدالها ب:

$$z_1 f(b_1) + z_2 f(b_2) + \cdots + z_n f(b_n)$$

خطوة (٢). أضف القيود الخطية التالية:

$$z_1 \le y_1$$

$$z_2 \le y_1 + y_2$$

$$z_3 \le y_2 + y_3$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} \le y_{n-2} + y_{n-1}$$

$$z_n \le y_{n-1}$$

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$$

$$x = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \cdots + z_n b_n$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$z_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

ولنوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٣,٥)

كبر الدالة:

$$Z = 12x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 14x_4 - C(x)$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_3 \le x + 500$$

$$x_2 + x_4 \le 1000$$

$$x_1 - x_2 \ge 0$$

$$2x_3 - 3x_4 \ge 0$$

$$x \le 1500$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

$$x \ge 0$$

حيث $C(x)$ هي دالة معرفة كما يلي:

$$C(x) = \begin{cases} 25x, & 0 \le x < 500, \\ 20x + 2500, & 500 \le x < 1000, \\ 15x + 7500, & 1000 \le x \le 1500. \end{cases}$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

الحل

لنلاحظ أولا أن دالة الهدف ليست خطية (مع أن ظاهرها خطي حسب تعريف الدالة $C(x)$). فبما أن $C(x)$ مؤلفة من ثلاث قطع مستقيمة بالنقاط الانكسارية 500، 0، 1000، فحسبما ورد سابقاً يمكن استبدال $C(x)$ بالعلاقة:

$$C(x) = z_1 C(0) + z_2 C(500) + z_3 C(1000) + z_4 C(1500)$$

وبالتالي تصبح مسألتنا كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 12x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 14x_4 - z_1C(0) - z_2C(500) - z_3C(1000) - z_4C(1500)$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_3 \le x + 500$$

$$x_2 + x_4 \le 1000$$

$$x_1 - x_2 \ge 0$$

$$2x_3 - 3x_4 \ge 0$$

$$x \le 1500$$

$$x = 0z_1 + 500z_2 + 1000z_3 + 1500z_4$$

$$z_1 \le y_1$$

$$z_2 \le y_1 + y_2$$

$$z_3 \le y_2 + y_3$$

$$z_4 \le y_3$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1,2,3$$

$$z_i \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,4$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\cdots,4$$

$$x \ge 0$$

(٣,٣) تطبيقات: مسائل خاصة في البرمجة العددية

كما أشرنا في مطلع هذا الفصل فإن متغيرات القرار في الكثير من مسائل الواقع العملي لا تقبل أن تأخذ إلا قيما عددية صحيحة وعندها نكون أمام مسألة برمجة (خطية) عددية بصورتها العامة. والمثال التالي يقدم مزيدا من الإيضاح على هذا النوع من المسائل.

مثال (٣,٦)

تقوم شركة وطنية بصناعة نوعين من القمصان أحدهما قطني والآخر من الخيوط المتنوعة يحتاج نوع القميص القطني إلى 1.5 متر من القماش بينما يحتاج قميص النوع الآخر إلى متر واحد من القماش. يتوافر للشركة يوميا 250 متر من القماش القطني و125 متر من قماش الخيوط المتنوعة. كذلك فإن كل قميص قطني يحتاج إلى 3

ساعات عمل بينما يحتاج قميص النوع الأخر إلى 2 ساعة عمل في حين يتوافر للشركة 400 ساعة عمل في اليوم. إذا علمت أن كل قميص قطني يباع ب 15 ريال وأن كل قميص من النوع الأخر يباع ب 20 ريال وأن الشركة ترغب بمعرفة عدد القمصان التي ستصنعها يوميا بحيث تجعل مبيعاتها أكبر ما يمكن فالمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان القطنية وليكن x_1 ومن القمصان ذات الخيوط المتنوعة وليكن x_2. ومن الواضح أيضا أن كلا من x_1 و x_2 لا يمكن أن يأخذ قيما غير صحيحة وبذلك فإن هذه المسألة هي من مسائل البرمجة العددية. وعلى ضوء البيانات المتوافرة فإن النموذج الرياضي للمسألة هو:

كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 15x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 \leq 125$$

$$1.5x_2 \leq 250$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ أعداد صحيحة}$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 125$ و $x_2^* = 50$ وقيمته $Z = 3250$ ريال في اليوم.

إضافة إلى مسائل البرمجة العددية العامة فإن هناك الكثير من المسائل التطبيقية الخاصة التي تصاغ كمسائل برمجة عددية ومنها ما يلي :

(٣,٣,١) مسألة حقيبة الظهر

من أحد المسائل التي لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيما عددية غير صحيحة هو ما يدعى مسألة " حقيبة الظهر Knapsack Problem".

وتصنف مسألة حقيبة الظهر إلى صنفين هما :

(٣,٣,١,١) مسألة حقيبة الظهر البسيطة Simple Knapsack Problem

لدينا حقيبة ذات سعة محدودة W ونرغب ملئها بعدد k ($0 \le k \le W$ و k عدد صحيح) من الأشياء من بين n من الأشياء كل وحدة منها لها وزنها v_j وقيمتها c_j بحيث لا نملأ أكثر من وحدة من كل من هذه الأشياء ولا نملأ جزءا من الوحدة من أي منها وبحيث يكون مجموع قيم الأشياء التي نملئها في هذه الحقيبة أكبر ما يمكن.

لمعرفة متغيرات القرار هنا نلاحظ أنه من أجل أي شيء من ال n شيئاً علينا أن نقرر فيما إذا كنا نرغب باختياره أم لا؟. لذا يمكن صياغة النموذج الرياضي لهذه المسألة باستخدام المتغيرات الثنائية القيم كما يلي : ليكن

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم وضع وحدة من الشيء } j \text{ في الحقيبة} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le W$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وللتوضيح نسوق المثال التالي:

مثال (٣,٧)

يرغب أحد المستثمرين باستثمار مبلغ 200000 ريال في بعض من 6 محافظ استثمارية. يبين الجدول رقم (٣,٢) قيمة الوحدة في كل من هذه المحافظ والربح المتوقع منها (ألف ريال). يرغب المستثمر باختيار المحافظ الاستثمارية المناسبة من بين المحافظ الست المتوافرة له والتي تجعل مجموع الربح الكلي المتوقع منها أكبر ما يمكن علما بأن نظام هذه المحافظ لا يسمح باستثمار جزء من الوحدة في أي من هذه المحافظ ولا يسمح كذلك باستثمار أكثر من وحدة في أي منها.

الجدول رقم (٣,٢). بيانات المثال (٣,٧).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4	5	6
المبلغ المطلوب للوحدة	24	64	32	36	79	15
الربح المتوقع للوحدة	1.2	3.1	2.2	5.3	5.5	.9

الحل

وفقا لبيانات المسألة فمن الواضح أن القرار بالنسبة لأي من المحافظ الستة هو أن يختارها أو لا يختارها المستثمر، ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم المعرفة كما يلي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المحفظة } j \text{ للاستثمار} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمسألة الناتجة هي مسألة "برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم" نموذجها الرياضي هو:

كبر الدالة :

$$Z = 1.2x_1 + 3.1x_2 + 2.2x_3 + 5.3x_4 + 5.5x_5 + 0.9x_6$$

وفقا للقيود :

$$24x_1 + 64x_2 + 32x_3 + 36x_4 + 79x_5 + 15x_6 \le 200$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 6$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 1$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 1$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 1$ ، والذي يعني أن على المستثمر أن يستثمر بوحدة واحدة في جميع المحافظ عدا الثانية منها ، وقيمته $Z = 15.1$ ألف ريال.

(٣,٣,١,٢) مسألة حقيبة الظهر العامة General knapsack problem

تختلف هذه المسألة عن سابقتها في (٣,٣,١,١) بأنه يمكن اختيار أي عدد صحيح من الوحدات من أي من الأشياء ال n إلا أن هذا العدد محصور بحد أدنى من الوحدات وليكن L_j وحد أعلى من الوحدات وليكن M_j ، عندئذ تكون متغيرات القرار هي

x_j : هو عدد الوحدات (الصحيحة) التي نختارها من العنصر j

والنموذج الرياضي للمسألة هو :

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \le W$$

$$L_j \le x_j \le M_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad \text{أعداد صحيحة}$$

ولتوضيح الحالة العامة لهذه المسألة نقدم المثال التالي:

مثال (٣,٨)

أعد صياغة مسألة المثال السابق (٣,٧) في كل من الحالتين التاليتين:

(أ) يمكن للمستثمر أن يستثمر أي عدد من الوحدات الصحيحة في أي من المحافظ الستة.

(ب) عدد الوحدات التي يمكن استثمارها في أي من المحافظ محدود بحد أدنى وحد أعلى من الوحدات الصحيحة كما هي معطاة في الجدول رقم (٣,٣).

الجدول رقم (٣,٣).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4	5	6
الحد الأدنى من الوحدات	1	0	1	0	1	0
الحد الأعلى من الوحدات	3	4	6	3	7	8

الحل

النموذج الرياضي لهذه المسألة هو:

(أ) هو نفس نموذج المثال (٣,٧) عدا أنه يجب استبدال القيد الأخير بالقيد

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad \text{عدد صحيح}$$

حيث x_j هنا يمثل عدد الوحدات الواجب استثمارها في المحفظة j وهو عدد صحيح غير سالب. و الحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 0$ ، $x_4 = 5$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 1$ وقيمته $Z = 27.4$ ألف ريال.

(ب) هو نفس النموذج في (أ) مع إضافة القيود الست التالية والتي تعبر عن الحدود الدنيا والعليا لعدد الوحدات المستثمرة في كل محفظة استثمارية:

$$1 \le x_5 \le 7 \text{ ، } 0 \le x_4 \le 3 \text{ ، } 1 \le x_3 \le 6 \text{ ، } 0 \le x_2 \le 4 \text{ ، } 1 \le x_1 \le 3$$

و $0 \le x_6 \le 8$ ،

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1 = 2$ ، $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$ ، $x_4 = 1$ ، $x_5 = 1$ و $x_6 = 0$ وقيمته $Z = 15.4$ ألف ريال.

وإضافة إلى التطبيقين السابقين في المثالين (٣,٧) و(٣,٨) فإن مسألة حقيبة الظهر بشكليها البسيط والعام هي مسألة ذات تطبيقات كثيرة في الحياة العملية. فمثلا يمكن النظر إلى حقيبة الظهر بأنها مخزن أو مستودع أو مكان أو ثلاجة نرغب بملئها بأشياء متنوعة بحيث نحقق أكبر منفعة ممكنة. كذلك يمكن النظر إلى رأس المال المحدد والذي نرغب باستثماره في جهات استثمارية متنوعة كما لو أنه حقيبة الظهر ذات السعة المحددة.

(٣,٣,٢) مسألة اختيار المشاريع مع وجود موارد محدودة

من أكثر الصعوبات التي نواجهها في حياتنا العملية هو كون الموارد المتوافرة لدينا (مال، وقت، أجهزة، قوى بشرية، طاقة، ... إلخ) هي موارد محدودة، الأمر الذي يقف حجر عثرة أمام تنفيذ كل ما نرغب من مشاريع. فلو كان لدينا n مشروعاً و m من الموارد المتوافرة حيث يتوافر b_i وحدة من المورد i $(i = 1, 2, \cdots, m)$ ولو فرضنا أن a_{ij} هي الكمية اللازمة من المورد i لتنفيذ المشروع j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ وأن العائد المتوقع من المشروع j هو c_j فإن الهدف يكون عندئذ هو: أي المشاريع يجب أن يتم اختيارها للتنفيذ بحيث يكون العائد الكلي منها أكبر ما يمكن؟ من الواضح أن القرار بالنسبة لآي مشروع هو: أن يتم اختيار المشروع للتنفيذ أو ألا يتم ذلك. ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم التالية:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المشروع } j \text{ للتنفيذ} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والنموذج الرياضي لهذه المسألة يصبح عندئذ كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

لاحظ أن هذه المسألة تختلف عن مسألة "حقيبة الظهر العامة" بوجود عدة قيود بدلا من قيد واحد. وكتطبيق على هذه المسألة نسوق المثال التالي :

مثال (٣,٩)

رصدت شركة مبلغ 12 مليون ريال لتوسعة مساحة أربعة من مخازنها لحدود 10 آلاف قدم مربع في أحد المناطق التجارية الهامة لها. يبين الجدول رقم (٣,٤) المساحة (قدم مربع) التي ستتوسع بها لكل مخزن وتكلفة تلك التوسعة (بملايين الريالات).

الجدول رقم (٣,٤). بيانات المثال (٣,٩).

رقم المخزن	1	2	3	4
مساحة التوسعة (قدم مربع)	5.2	3.1	2.2	4.8
تكلفة التوسعة (مليون ريال)	7.2	6.4	1.5	2.9

ونظرا لمحدودية رأس المال المخصصة (12 مليون) ومحدودية المساحة المخصصة (10 ألاف قدم مربع) فإن الشركة ترغب بمعرفة أي المخازن ستختار للتوسعة بحيث يكون مجموع عدد المخازن التي ستقوم بتوسعتها أكبر ما يمكن . المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الحل

من الواضح أن متغيرات القرار لهذه المسألة هي :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المخزن } j \text{ لتوسعته} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وحسب البيانات المعطاة فإن النموذج الرياضي لها يصبح كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

وفقا للقيود :

$$7.2x_1 + 6.4x_2 + 1.5x_3 + 2.9x_4 \le 1.2$$

$$5.2x_1 + 3.1x_2 + 2.2x_3 + 4.8x_4 \le 10$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 0$ ، $x_2^* = 1$ ، $x_3^* = 0$ و $x_4^* = 1$ وقيمته $Z^* = 2$ ألف ريال.

(٣,٣,٣) مسألة التكلفة الثابتة للتجهيز

هناك الكثير من الإعدادات التي لابد من إجرائها عندما نرغب بتنفيذ مهمة معينة ولهذه الإعدادات تكاليفها الخاصة بها، كأن نخصص أشخاصاً محددين لاستكمال هذه

الإعدادات ولمثل هذا التخصيص تكاليفه الخاصة كالرواتب والأجور والحوافز، ... إلخ. كذلك فإن عملية استكمال هذه الإعدادات قد يستلزم بعض النفقات مثل الهواتف والورق والأجهزة وتكاليف السفر ... إلخ. ومن أمثلة هذا النوع من التكاليف.

١- إن بناء منشأة ما له تكاليف إعداد خاصة مثل تكاليف استخراج التراخيص ودراسات الجدوى اللازمة وأجور المكلفين بهذه المهمات إضافة إلى تكاليف أخرى تتعلق بطبيعة المنشأة المراد بناؤها. وهذه التكاليف تكون في معظم الأحيان مستقلة عن حجم المنشأة المراد بناؤها.

٢- ومثل ذلك عمليات سحب أو إيداع مبالغ مالية حيث تنشأ تكاليف مشابهة لتلك التي وردت في (١) وأن هذه التكاليف مستقلة عن حجم المبالغ المودعة أو المسحوبة.

٣- عندما نقوم بإنتاج عدد من المنتجات المختلفة على جهاز أو أكثر لابد من إعادة تجهيز الأجهزة التي تمر عبرها المنتجات في كل عملية إنتاج جديدة. ولعملية التجهيز هذه تكاليفها الخاصة بها كتكاليف تعطل هذه الأجهزة عن العمل لحين إعادة تحضيرها وتعييرها لعملية إنتاج جديدة تتناسب مع طبيعة المنتج الجديد. وكما نلاحظ فإن مثل هذه التكاليف لا تتغير بتغير حجم الكمية المنتجة.

ويشار إلى مثل هذه الأنواع من التكاليف الثابتة (بشكل عام) باسم "تكاليف التجهيز" (Setup cost). ولصياغة هذا النوع من المسائل نستخدم متغيرات القرار التالية :

x_j : الكمية المنتجة من السلعة j

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x_j > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو رغبنا بوضع حدود عليا على الكمية المنتجة من السلعة j مثل M_j لكان لدينا القيد التالي :

$$x_j \le M_j y_j$$

ولكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + K_j y_j$$

حيث K_j هي تكاليف التجهيز للمنتج j .

وكتطبيق على ذلك نقدم الأمثلة التالية.

مثال (٣,١٠) عروض أسعار مع تكلفة نقل ثابتة

تعتزم جامعة الملك سعود شراء 50000 جهاز كمبيوتر محمول لتوزيعها على أعضاء الهيئة التدريسية وبهذا الخصوص فقد تلقت الجامعة ثلاثة عروض من ثلاث شركات على النحو التالي:

- العرض الأول: سعر الجهاز 2500 ريال ولكن الشركة اشترطت ألا تقل الطلبية عن 20000 جهاز وألا تزيد عن 30000 جهاز وأن تتحمل الجامعة مبلغ 2000 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.
- العرض الثاني: سعر الجهاز 2750 ريال ولكن الشركة اشترطت ألا تقل الطلبية عن 10000 جهاز وأن تتحمل الجامعة مبلغ 3000 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.
- العرض الثالث: سعر الجهاز 2000 ريال ويمكن للشركة أن تزود الجامعة بأي عدد من الأجهزة ولغاية 30000 جهاز على أن تتحمل الجامعة مبلغ 2500 ريال كتكاليف لنقل الأجهزة.

ولتقليل مجموع تكاليف النقل والشراء فقد قررت الجامعة أن تتعامل مع شركتين فقط من الشركات الثلاث، المطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

لنلاحظ هنا أن تكاليف النقل تلعب دور التكاليف الثابتة لأنها فعلا تكاليف ثابتة كونها لا تعتمد على حجم الكمية المنقولة. أما متغيرات القرار لهذه المسألة فهي

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الأولى = x_1

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الثانية = x_2

عدد الأجهزة المشتراة من الشركة الثالثة = x_3

ومن الواضح أن كلا من x_1 ، x_2 ، x_3 هو عدد صحيح غير سالب. كذلك لابد من إدخال المتغيرات الثنائية القيم التالية :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x_j > 0 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي :

كبر الدالة :

$$Z = 2500x_1 + 2750x_2 + 2000x_3 + 200y_1 + 3000y_2 + 2500y_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 \le 30000y_1$$

$$x_1 \ge 30000y_1$$

$$x_2 \le My_2$$

$$x_2 \ge 10000y_2$$

$$x_3 \geq 30000 y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3 \text{ أعداد صحيحة}$$

$$y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

والحل الأمثل لهذه المسألة هو $x_1^* = 20000$ ، $x_2^* = 0$ ، $x_3^* = 30000$ ، $y_1^* = 1$ ، $y_2^* = 0$ ، $y_3^* = 1$ ، وقيمته $Z^* = 110004500$ ريال.

مثال (٣,١١) مسألة تصميم الشبكات

من المسائل التي نواجهها في الحياة العملية هو ما يسمى تصميم الشبكات التي تربط بين عدد من المنابع (Sources) وعدد من الغايات (Destinations) بطريقة نجعل فيها مجموع كل من تكلفة بناء الروابط بينها وتكلفة التدفق الكلي من المنابع إلى الغايات أقل ما يمكن. وكمثال على ذلك لنفرض أن لدينا الشبكة الممثلة بالشكل رقم (٣,١)، حيث $S = \{1,3,7\}$ تمثل مجموعة المنابع و $D = \{2,4,5,8\}$ تمثل مجموعة الغايات ولدينا عقدة انتقال (Transshipment) واحدة ممثلة بالمجموعة $T = \{6\}$. وفي هذا الشكل قمنا بتمثيل طرق الاتصال التي ينبغي انشاؤها بمتجهات منقطة وطرق الاتصال الموجوة مسبقا بمتجهات متصلة وكما هو ملاحظ فإن كافة طرق الاتصال تعطى بالمجموعة $A = \{1,\cdots,17\}$.

لنفرض أن لكل طريق اتصال حد أعلى من التدفق الشبكي وليكن u_k وبتكلفة قدرها c_k للوحدة من هذا التدفق كما هي موضحة على الشكل رقم (٣,١) ولتسهيل

المسألة فقد افترضنا أن المجموعة التي ينبغي انشاؤها من طرق الاتصال هي $R = \{1,2,3,4,5\}$ ويتكاليف قدرها $f_1 = 8$ ، $f_2 = 6$ ، $f_3 = 9$ ، $f_4 = 7$ ، $f_5 = 7$ ، فإن المسألة تصبح كما يلي:

ما هي طرق الاتصال الواجب انشاؤها وما هي طاقة التدفق الشبكي على كل طريق اتصال بحيث تصبح مجموع تكاليف التدفق والإنشاء اقل ما يمكن؟

الحل

لنفرض أن x_k تمثل التدفق على طريق الاتصال k من المجموعة R عندئذ تكون التكلفة الكلية للطريق k معطاة بالدالة التالية:

$$h_k(x_k) = \begin{cases} f_k + c_k x_k & \text{إذا كان } x_k > 0 \\ 0 & \text{إذا كان } x_k = 0 \end{cases}$$

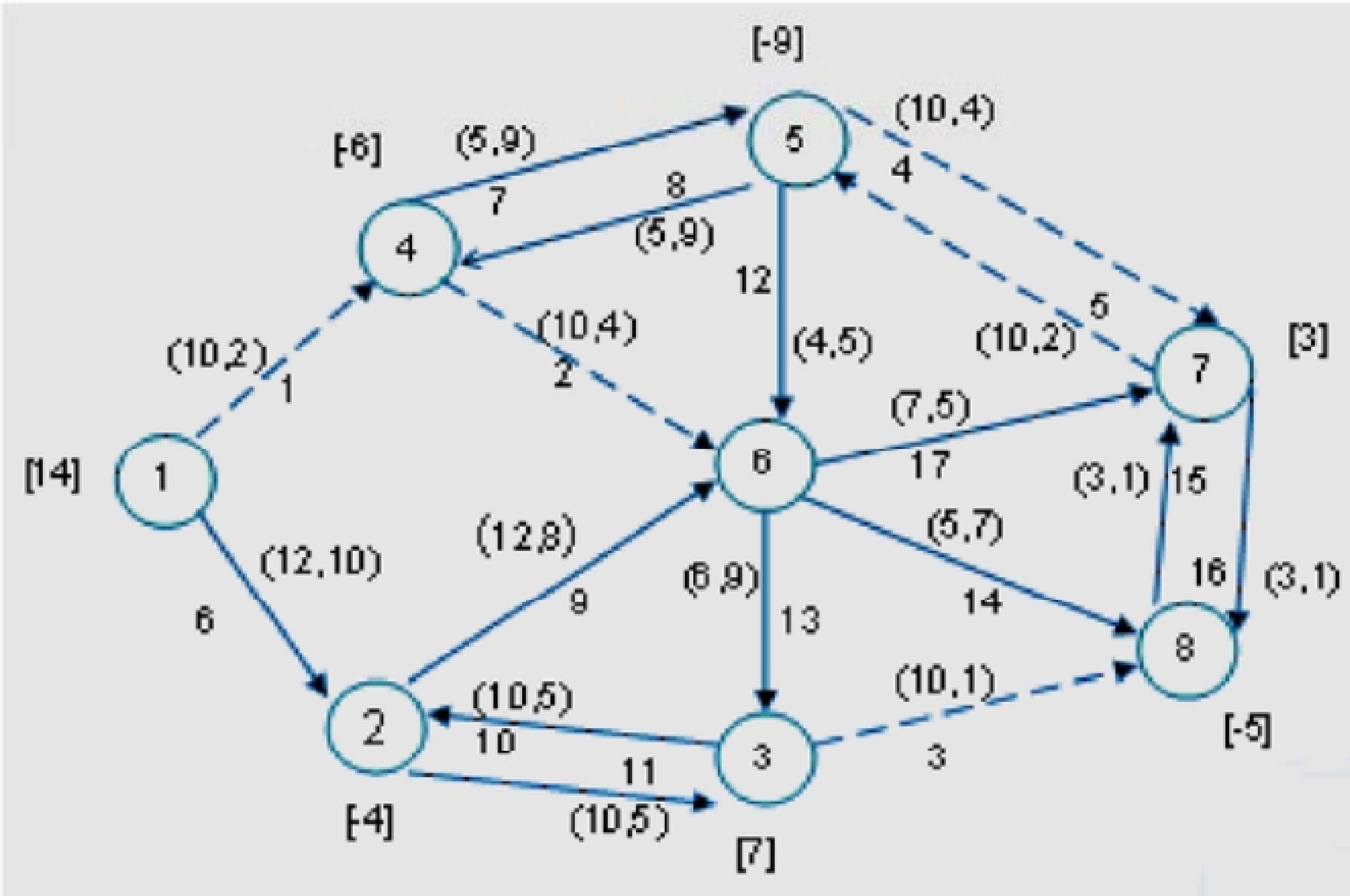
والتي يمكن تمثيلها بيانيا بالشكل رقم (٣،١). وكما هو ملاحظ فإن هذه الدالة هي دالة خطية عدا أنها تملك قفزة (Jump) أو انقطاع عند نقطة الأصل الأمر الذي يصعب معه التعامل معها كدالة خطية. ولتجاوز مثل هذه الصعوبة نقدم المتغيرات الثنائية القيم (التي تمثل تكاليف ثابتة) التالية: من أجل $k \in R$ ، فإننا نعرف y_k كما يلي:

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم إنشاء طريق الاتصال } k \\ 0 & \text{إذا كان } x_k = 0 \end{cases}$$

وبذلك يمكن التعبير عن الدالة $h_k(x_k)$ كما يلي:

$$h_k(x_k) = f_k y_k + c_k x_k$$

حيث $x_k \geq 0$ و $y_k = 1$ أو 0 .



الشكل رقم (٣,١).

وبمثل هذه المسائل علينا أن نلاحظ وجود نوع من القيود الضمنية وهي هنا: التدفق في أي من طرق الاتصال يجب ألا يتجاوز طاقة تلك الطريق (الشكل رقم ٣,٢). فلو رمزنا بالرمز $K_{O(i)}$ لمجموعة الطرق المنبثقة من العقدة i وبالرمز $K_{T(i)}$ لمجموعة الطرق التي تصب في العقدة i لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{k \in R} f_k y_k + \sum_{k \in A} c_k x_k$$

وفقا للقيود:

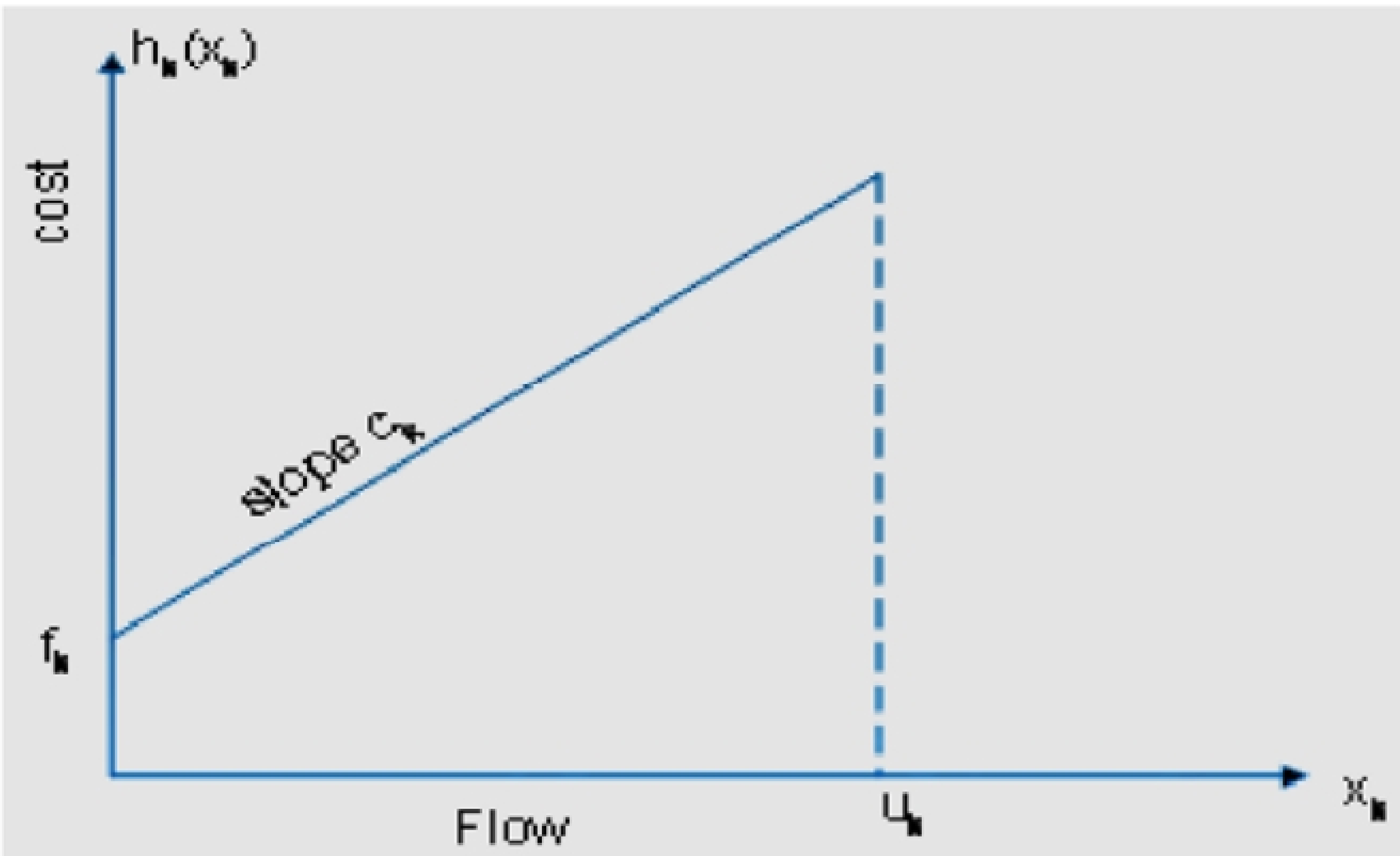
$$\sum_{k \in K_{O(i)}} x_k - \sum_{k \in T_{O(i)}} x_k = b_i, \quad i \in S \cup D \cup T$$

$$x_k \le u_k y_k, \quad k \in R$$

$$x_k \le u_k, \quad k \in A$$

$$x_k \ge 0, \quad k \in A$$

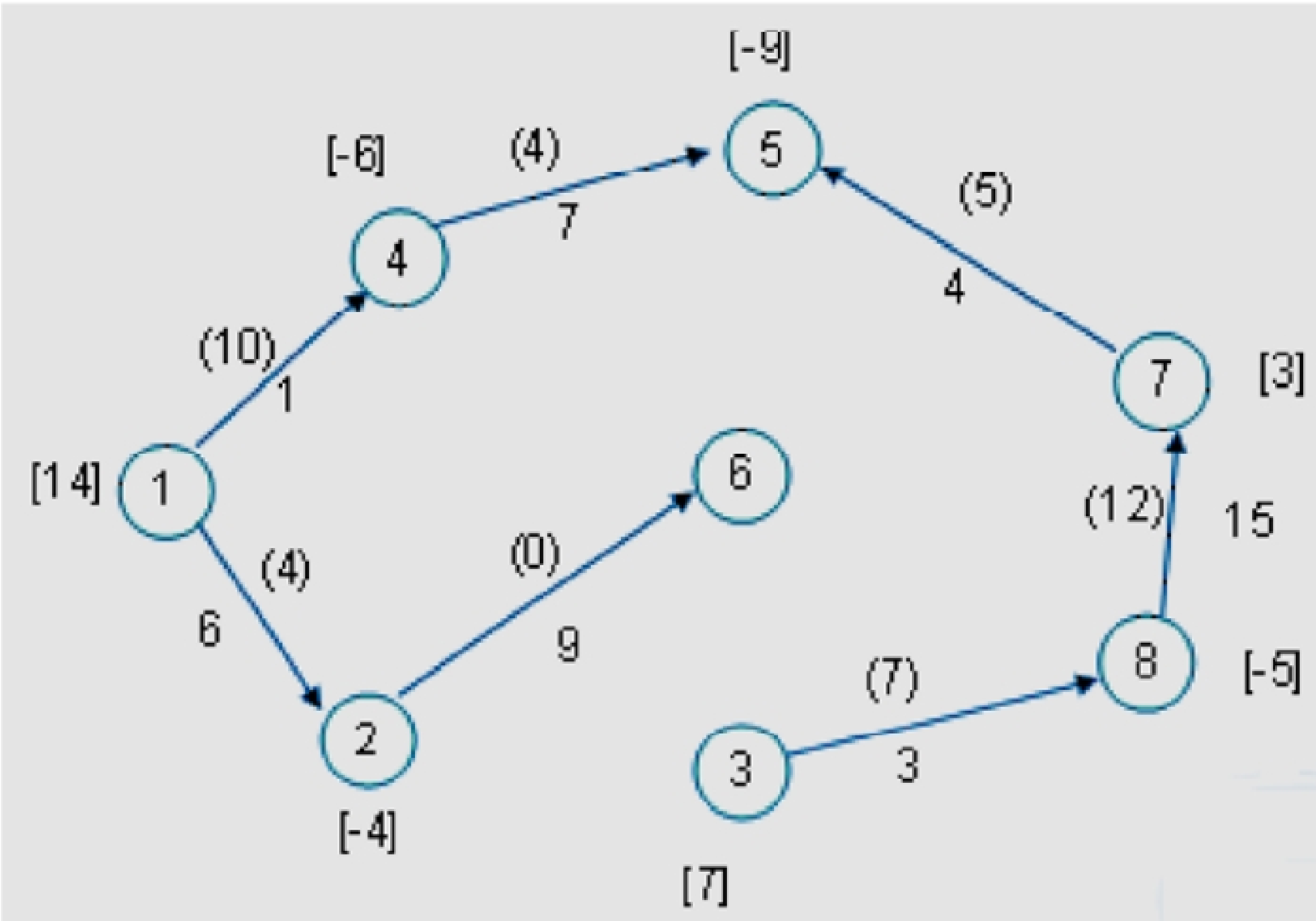
$$y_k = 1 \text{ أو } 0 \qquad , \quad k \in R$$



الشكل رقم (٣,٢).

لاحظ أن القيد الأول يعبر عما نطلق عليه قانون حفظ التدفق حيث يعبر المقدار الثابت b_i عن مقدار موجب بالنسبة لأي عقدة منبع ومقدار سالب بالنسبة لأي عقدة غاية وصفر بالنسبة لأي عقدة انتقال. ويفيد القيد الثاني بأن $y_k = 1$ إذا كان x_k أكبر من الصفر، ويفيد أيضا أن التكلفة الثابتة ستقع لا محالة إذا كان k هو طريق اتصال مستخدمة. ويلعب القيد الثالث (الرابع) الدور بوضع حد أعلى (حد أدنى) على

التدفقات في العقد المختلفة. أما القيد الخامس فيحدد طبيعة المتغيرات التي تساهم في إدخال التكلفة الثابتة وبأن هذه المتغيرات ثنائية القيم. ويعطي الشكل رقم (٣,٣) الحل الأمثل لهذه المسألة.



الشكل رقم (٣,٣).

(٤,٣,٣) مسألة التخصيص

تعالج هذه المسألة عملية تخصيص عدد من الموارد (عمال، موظفين، شركات، ... إلخ) لعدد من الأنشطة (أعمال، وظائف، مشاريع، ... إلخ) والهدف من عملية التخصيص هو جعل العائد الناتج منها أفضل ما يمكن (أكبر ما يمكن للأهداف التي تتضمن زيادة الأرباح وأقل ما يمكن للأهداف التي تتضمن تقليل التكاليف). وهناك نوعان من مسائل التخصيص هما:

(٣,٣,٤,١) مسألة التخصيص البسيطة

هنا تكون عملية التخصيص n من الموارد ل n من الأنشطة بحيث يتم تخصيص كل مورد لنشاط واحد فقط وكل نشاط ينفذه مورد واحد فقط والتي نطلق عليها عملية تخصيص واحد لواحد. وأمثلة ذلك تخصيص عدد من المكائن لنفس العدد من الأعمال، وتخصيص عدد من الباعة لنفس العدد من مهمات البيع، وتخصيص عدد من العقود لنفس العدد من الشركات. ومن الواضح أن متغيرات القرار لهذا النوع من المسائل هي متغيرات ثنائية القيم يمكن تعريفها بشكل عام على النحو التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المورد } i \text{ للنشاط } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو كان الهدف هو تقليل التكاليف لكان النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \ \text{أو} \ 0, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

وكتطبيق على هذا النوع من المسائل نسوق المثال التالي:

مثال (٣,١٢)

لدى شركة أربعة أعمال مختلفة وترغب بإنجازها على أربع من المكائن التي تمتلكها بحيث تنجز كل عمل على واحدة من هذه المكائن. يبين الجدول رقم (٣,٥) الوقت اللازم لإنجاز كل من هذه الأعمال على كل من المكائن الأربعة. تهدف الشركة إلى إنجاز جميع الأعمال بأقل زمن ممكن والمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

كما أوضحنا سابقاً فمتغيرات القرار في هذا المثال هي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص الماكينة } i \text{ لانجاز العمل } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ووفقا للبيانات المتعلقة بهذه المسألة يكون النموذج الرياضي لها كما يلي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z \; = \; & 15x_{11} + 24x_{12} + 19x_{13} + 12x_{14} + 25x_{21} + 19x_{22} + 17x_{23} + 14x_{24} \\ & 18x_{31} + 15x_{32} + 23x_{33} + 18x_{34} + 22x_{41} + 20x_{42} + 14x_{43} + 16x_{44} \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

وهذه المسألة هي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم. وتعبر القيود الأربعة الأولى عن أن كل ماكينة قد خصصت لإنجاز عمل من الأعمال وتعبر القيود الأربعة التي تليها عن أن كل عمل قد تم إنجازه على أحد الكائن. وكما سنرى في الجزء الثاني من هذا الكتاب فإن الحل الأمثل لهذه المسألة هو $x^*_{ij} = 0$ عدا $x^*_{11} = x^*_{24} = x^*_{32} = x^*_{43} = 1$ وقيمته $Z^* = 58$.

الجدول رقم (٣,٥). بيانات المثال (٣,١٢).

المكائن	أزمنة التنفيذ (ساعة) للأعمال			
	1	2	3	4
1	15	24	19	12
2	25	19	17	14
3	18	15	23	18
4	22	20	14	16

(٣,٣,٤,٢) مسألة التخصيص العامة

وتختلف هذه المسألة عن سابقتها بأن التخصيص لا يكون واحد لواحد، ومثال ذلك أنه لو أردنا تخصيص عدد من الطلاب لعدد من الغرف في السكن الجامعي بحيث نسكن طالبين في كل غرفة لكانت هذه المسألة هي تخصيص $2n$ من الموارد ل n من الأنشطة. وبشكل عام لو فرضنا أن المورد i قد خصص لتنفيذ النشاط j مع إمكانية أن هذا المورد i قد يقوم بتنفيذ نشاط أو أكثر غير النشاط j. ولو فرضنا أن المتوافر من المورد i = b_i

تكلفة تخصيص المورد i لتنفيذ النشاط j = c_{ij}

عدد الوحدات اللازمة من المورد i لتنفيذ النشاط j = s_{ij}

عندئذ نطلق على عملية تخصيص كافة الموارد لتنفيذ كافة الأنشطة ضمن الشروط السابقة بأنها " مسألة تخصيص عامة " ومتغيرات القرار فيها هي المتغيرات الثنائية القيم x_{ij} المعرفة بطريقة مماثلة لمسألة التخصيص البسيطة هي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المورد } i \text{ للنشاط } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} s_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

وللتوضيح نسوق المثال التالي :

مثال (٣,١٣)

ترغب ست جامعات بالاستعانة بثلاثة علماء طب متميزين لإجراء أبحاث طبية تتعلق ببعض الأمراض الوراثية. ولدى تفاوض هذه الجامعات مع العلماء الثلاثة تبين أن أي منهم لا يستطيع أن يبقى في أي من الجامعات الست أكثر من مدة محددة كما أنه سيتقاضى على ذلك أجراً يتناسب مع مدة بقائه وعلى طبيعة الأبحاث الطبية التي سيجريها مع أن الحد الأقصى لإمكانية تواجد أي من العلماء في أي جامعة هو 50 أسبوعا. البيانات المتعلقة بهذه المسألة معطاة كما في الجدول رقم (٣,٦). الأجر(ألف دولار) والوقت (أسبوع).

فإذا كانت الجامعات الست تهدف لجعل عملية تخصيص العلماء الثلاث عليها بأقل قدر ممكن من التكاليف فالمطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

من الواضح أن القرار هنا هو أن يتم اختيار جامعة لعالم من العلماء الثلاث أو ألا يتم ذلك . فمتغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية التالية :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار الجامعة } i \text{ للعالم } j \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

الجدول رقم (٣,٦). بيانات المثال (٣,١٣).

العلماء	الأجر والوقت	الجامعات 1	2	3	4	5	6
1	الأجر	130	30	510	30	340	20
	الوقت	30	50	10	11	13	9
2	الأجر	460	150	20	40	30	450
	الوقت	10	20	60	10	10	17
3	الأجر	40	370	120	390	14	30
	الوقت	70	10	10	15	8	12

فالنموذج الرياضي لهذه المسألة هو:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z = {} & 130x_{11} + 460x_{12} + 40x_{13} + 30x_{21} + 150x_{22} + 370x_{23} + 510x_{31} + 20x_{32} + 120x_{33} \\ & + 30x_{41} + 40x_{42} + 390x_{43} + 340x_{51} + 30x_{52} + 40x_{53} + 20x_{61} + 450x_{62} + 30x_{63} \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$ (الجامعة 1)

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$ (الجامعة 2)

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$ (الجامعة 3)

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1$$ (الجامعة 4)

$$x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1$$ (الجامعة 5)

$$x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1$$ (الجامعة 6)

$$30x_{11}+50x_{21}+10x_{31}+11x_{41}+13x_{51}+9x_{61}\le 50 \qquad \text{(العالم 1)}$$

$$10x_{12}+20x_{22}+60x_{32}+10x_{42}+10x_{52}+17x_{62}\le 50 \qquad \text{(العالم 2)}$$

$$70x_{13}+10x_{23}+10x_{33}+15x_{43}+8x_{53}+12x_{63}\le 50 \qquad \text{(العالم 3)}$$

$$x_{ij}=1 \ \text{أو}\ 0,\quad i=1,\cdots,6;\ j=1,2,3$$

لاحظ أن القيود الستة الأولى تضمن تخصيص كل جامعة لواحد من العلماء الثلاث وأن القيود الثلاث الأخيرة تضمن عدم عمل أي من العلماء الثلاث لدى جميع الجامعات أكثر من خمسين أسبوعا. وهذه المسألة هي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم، والحل الأمثل لهذه المسألة هو تخصيص الجامعات 1,4 و6 إلى العالم 1 والجامعات 2 و5 إلى العالم 2 والجامعة 3 إلى العالم 3 وستكون أقل تكلفة للتخصيص المقابل هي 480000 $.

(٣,٣,٥) مسألة الإيداعات البريدية المقيدة

تحتاج كثير من الشركات كالبنوك وشركات بطاقات الائتمان لاستلام بعض أنواع من المدفوعات بالبريد، ولذلك فعلى مثل هذا النوع من الشركات أن يقرر عدد المراكز التي ستستقبل فيها مثل هذه المدفوعات وأماكنها. ويكون الهدف في مثل هذه الحالة هو تحديد العدد والمكان الأمثل لهذه المراكز بحيث تكون التكاليف الكلية الناتجة أقل ما يمكن. ويشار لمثل هذا النوع من المسائل باسم "مسائل الإيداعات البريدية المقيدة". وتأتي كلمة مقيدة هنا لتشير إلى أن تقييد هذه المراكز بأمكنة (مدن، أحياء، ... إلخ) محددة وإلى تقييد مدفوعات الزبائن بحيث تكون إلى مراكز محددة حيث أن أي دفعة لاتصل إلى المكان المحدد لها ستؤدي إلى نوع من التأخير وبالتالي إلى الخسارة.

ولتوضيح هذا النوع من المسائل نسوق المثال التالي :

مثال (٣,١٤)

يتسلم البنك السعودي الفرنسي مدفوعات بطاقات الائتمان من أربع مناطق رئيسة في المملكة العربية السعودية هي : المنطقة الوسطى، المنطقة الغربية، المنطقة الشمالية والمنطقة الشرقية. لذلك فقد قرر افتتاح أربع مراكز لهذا الغرض في المدن التالية : الرياض، جدة، تبوك والدمام.

يبين الجدول رقم (٣,٧) التالي الخسارة الناتجة (تكاليف ناتجة) عن ارسال زبون من المنطقة i مدفوعاته إلى المدينة j . كذلك فإن التكلفة السنوية لأي مركز في أي من المدن الأربع تقدر ب 50000 ريال. إذا افترضنا أن على كل منطقة أن ترسل مدفوعات زبائنها إلى واحدة فقط من المدن وأنه لا توجد قيود على مقدار المدفوعات التي يمكن لأي مركز أن يستلمها، فالمطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣,٧). بيانات المثال (٣,١٤).

المنطقة	المدينة			
	الرياض	جدة	تبوك	الدمام
الوسطى	28	84	112	112
الغربية	60	20	50	50
الشمالية	96	60	24	60
الشرقية	64	40	40	16

الحل

من الواضح أن على البنك السعودي الفرنسي أن يتخذ نوعين من القرارات :

- الأول : في أي مدينة من المدن الأربعة سيختار مكان عمل مركز ما من المراكز الأربعة، ولذلك لدى البنك متغيرات القرار الثنائية القيم التالية : من أجل $j = 1, \cdots, 4$ نعرف

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا عمل المركز في المدينة } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

● الثاني: لأي من المراكز في المدن ستقوم منطقة معينة بإرسال (أو دفع) مدفوعاتها، ولذلك لدى البنك متغيرات القرار الثنائية القيم التالية: من أجل $i, j = 1, \cdots, 4$ نعرف

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا أرسلت المنطقة } i \text{ مدفوعاتها للمدينة } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبالتالي سيكون النموذج الرياضي لهذه المسألة على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z \;=\; & 28x_{11} + 84x_{12} + 112x_{13} + 112x_{14} + 60x_{21} + 20x_{22} + 50x_{23} + 50x_{24} \\ & + 96x_{31} + 60x_{32} + 24x_{33} + 60x_{34} + 64x_{41} + 40x_{42} + 40x_{43} + 16x_{44} \\ & + 50y_1 + 50y_2 + 50y_3 \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{ij} \le y_j, \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

$$x_{ij}, y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j = 1, \cdots, 4$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية بمتغيرات ثنائية القيم. وتضمن القيود الأربعة الأولى أن كل منطقة سترسل مدفوعات زبائنها إلى مدينة معينة، بينما يضمن القيدين الأخيرين أنه إذا أرسلت منطقة ما مدفوعات زبائنها إلى مدينة معينة فإن هذه المدينة تمتلك مركزاً. والحل الأمثل لهذه المسألة هو $y_1^* = y_3^* = 1$ و $x_{11}^* = x_{23}^* = x_{43}^* = 1$ وقيمته $Z^* = 242$.

(٣,٣,٦) مسألة تحديد مواقع وطاقة مراكز الخدمات وسياسات التوزيع المثلى

نحتاج في كثير من المسائل العملية أن نحدد مواقع مراكز خدمات معينة وطاقتها الاستيعابية ونحدد بعدها سياسات التوزيع المثلى من هذه المراكز إلى أماكن الاحتياج والتي تجعل التكلفة الكلية لهذه العملية أقل ما يمكن. فمثلا نحتاج تحديد مراكز المستودعات الخاصة بشركة ما وكذلك تحديد حجم كل من هذه المستودعات ثم نقوم بعدها بإيجاد سياسات النقل المثلى للبضائع المخزنة في هذه المستودعات إلى مناطق الاستهلاك بحيث تكون التكلفة الكلية للعملية برمتها أقل ما يمكن. وينقسم هذا النوع من المسائل إلى قسمين: في القسم الأول نفترض أن الطاقة الاستيعابية لأي مركز خدمة هي طاقة محددة ولكنها غير معروفة (نرغب بتحديدها) أما في القسم الثاني فإننا لا نشترط ذلك.وفي الحالتين فإننا نرغب كذلك بتحديد مواقع مراكز الخدمات هذه.

(٣,٣,٦,١) مسألة تحديد مواقع مراكز الخدمات ذات الطاقة المحدودة وسياسات التوزيع المثلى منها

لنفرض أن لدينا m مركز خدمات بحيث أن طاقة المركز المقام في الموقع i هي z_i وحدة من السلعة المطلوبة (نرغب بتحديدها) وبطاقة قصوى معلومة وقدرها u_i حيث

$i = 1,\cdots,m$. وتقدم هذه المراكز الخدمات ل n من مناطق الاحتياج تحتاج فيها المنطقة j إلى d_j وحدة من السلعة المطلوبة (d_j معلومة) حيث $j = 1,\cdots,n$. ولو فرضنا أن تكلفة تجهيز مركز خدمات في موقع ما i سيكلف f_i كتكلفة ثابتة ولكن تكلفة الوحدة من هذا المركز ولتكن v_i تختلف من مركز لأخر فهي تكلفة متغيرة. ولو فرضنا أن تكلفة نقل وحدة من السلعة المطلوبة من مركز الخدمة i إلى منطقة الاحتياج j هي c_{ij} (c_{ij} معلومة) وأن x_{ij} هو عدد الوحدات الواجب نقلها من مركز الخدمة i إلى منطقة الاحتياج j حيث $i = 1,\cdots,m$ و $j = 1,\cdots,n$ ، ولنعرف المتغيرات y_i كما يلي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا اخترنا مركز الخدمة في الموقع } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

لنفرض أن الهدف هو إيجاد القيم المثلى لكل من z_i ، x_{ij} ، y_i (متغيرات القرار) بحيث تكون التكلفة الكلية للعملية برمتها أقل ما يمكن فإن النموذج الرياضي لهذه المشكلة هو:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m} v_i z_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le z_i, \quad i = 1,\cdots,m$$

$$z_i \le u_i y_i, \quad i = 1,\cdots,m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية مختلطة. سنقوم الآن بتوضيح هذه الحالة من خلال المثال التالي:

مثال (٣,١٥)

ترغب شركة ببناء شبكة لتوزيع المؤن في المملكة العربية السعودية وقد قررت لذلك اختيار 5 مواقع كمواقع محتملة لإشادة مخازنها فيها حيث تتوقع الشركة أن يتم توزيع البضائع المُخزنة فيها على 5 مناطق احتياج في المملكة. البيانات المتعلقة بهذه المسألة تتضمن تكلفة نقل وحدة من المخزون من أي من المخازن الخمسة إلى كافة مناطق الاحتياج والتكلفة الثابتة لتشييد مخزن في منطقة معينة والتكلفة المتغيرة التي عرفناها أعلاه. أما ما أسميناه بالطاقة القصوى فهي هنا محددة بعدد الوحدات التي يمكن نقلها أسبوعيا. كذلك فإن هذا الجدول يحوي على عدد الوحدات المتوقع استهلاكها في كل منطقة والبيانات معطاة في الجدول رقم (٣,٨).

تهدف الشركة إلى اختيار مواقع المخازن وسعتها وسياسات النقل المثلى التي تلبي الاحتياج من الإستهلاك والتي تجعل مجموع التكاليف الكلية لهذه العملية أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الحل

الجدول رقم (٣,٨). بيانات المثال (٣,١٥).

المخازن	تكلفة نقل الوحدة من المخزن إلى المنطقة					الطاقة القصوى	التكلفة الثابتة	التكلفة المتغيرة
	1	2	3	4	5			
1	8	21	42	12	37	80	1000	20
2	21	10	31	24	40	80	1500	17
3	42	31	4	14	32	80	1700	13
4	12	24	14	7	12	80	1400	25
5	37	40	32	12	10	80	1200	33
الإستهلاك المتوقع	30	40	50	35	40			

كما نلاحظ فإن الشروط في هذه المسألة العملية تتطابق تماما مع الشروط النظرية أعلاه. فلو حافظنا على الرموز لكان النموذج الرياضي لها كما يلي:

صغر الدالة:

$$
\begin{aligned}
Z \quad = \quad & 1000\,y_1 + 1500\,y_2 + 1700\,y_3 + 1400\,y_4 + 1200\,y_5 \\
& + 20z_1 + 17z_2 + 13z_3 + 25z_4 + 33z_5 \\
& + 8x_{11} + 21x_{12} + 42x_{13} + \cdots + 10x_{55}
\end{aligned}
$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 50$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 35$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 40$$

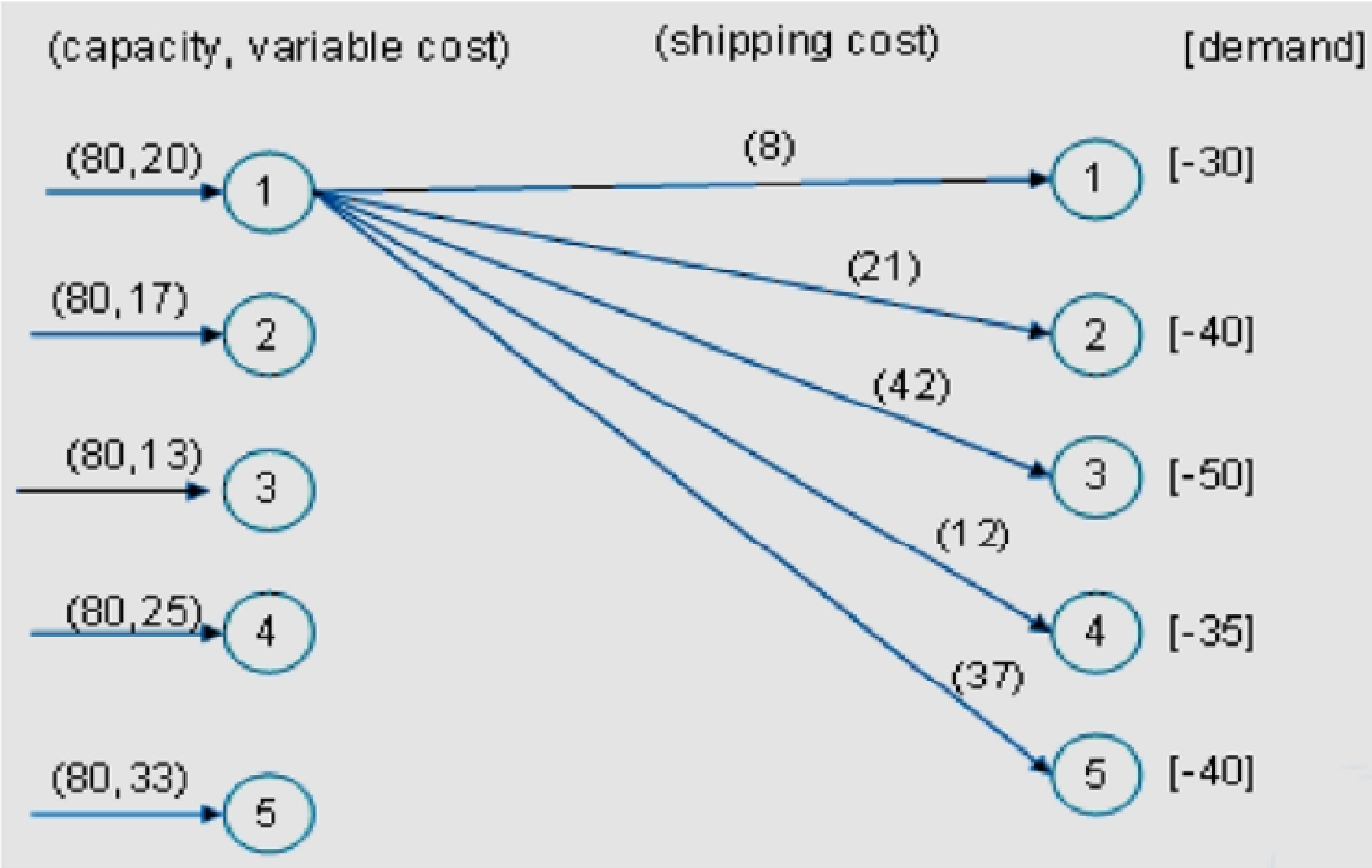
$$\begin{array}{ll} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \le z_1 & z_1 \le 80\, y_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le z_2 & z_2 \le 80\, y_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \le z_3 & z_3 \le 80\, y_3 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \le z_4 & z_4 \le 80\, y_4 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \le z_5 & z_5 \le 80\, y_5 \end{array}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 5; j = 1, \cdots, 5$$

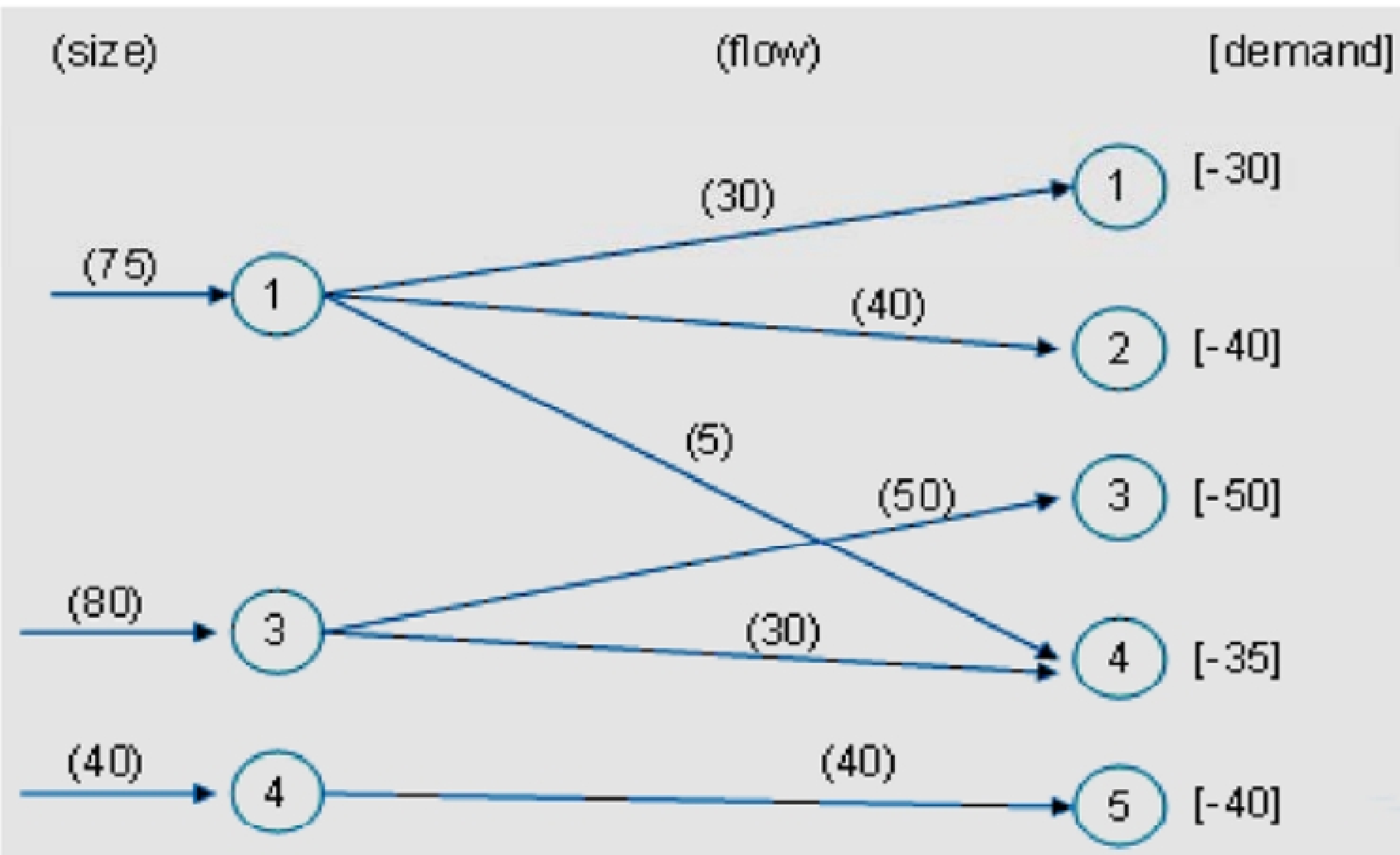
$$z_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية مختلطة كما أسلفنا. ويمكن النظر إلى هذه المسألة على أنها مسألة شبكات تعطى شبكتها بشكل جزئي بالشكل رقم (٣,٤) حيث أظهرنا الإستهلاك المتوقع كمقادير سالبة. والحل الأمثل لهذه المسألة هو أن تقوم الشركة ببناء مخازنها في المواقع 1,3 و4 وفقا لسياسة النقل المثلى الموضحة بالشكل رقم (٣,٥)



الشكل رقم (٣,٤). تمثيل المثال (٣,١٥) كشبكة.



الشكل رقم (٣,٥). تمثيل حل المثال (٣,١٥) كشبكة.

(٣,٣,٦,٢) مسألة تحديد مواقع مراكز الخـدمات ذات الطاقـة غـير المحـدودة وسياسات التوزيع المثلى منها

كما أسلفنا فإن هذه المسألة تختلف عن سابقتها بافتراض أن طاقة مراكز الخدمات تصبح هنا غير محدودة ولذلك فإن z_i لا تبقى من ضمن متغيرات القرار وتبقى الصياغة السابقة صحيحة بعد تعديل كل ما يتعلق بهذه المتغيرات وهي الحد الثاني من دالة الهدف والقيد الثالث حيث نعطي ل u_i في هذا القيد قيمة اختيارية كبيرة نسبيا.

ثمة نموذج معدل لهذه المسألة يسهل عملية حله بطريقة القطع والحد. وهذا النموذج المعدل مبني على تعديل في فرضيات النموذج الأصلي على النحو التالي:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم بناء المركز } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ونظرا لأن الطاقة الاستيعابية للمراكز غير محدودة فيمكن إثبات أنه يمكن الوصول إلى الحل الأمثل بتزويد معدل الاستهلاك المتوقع لكل منطقة احتياج من واحد فقط من مراكز الخدمة. وفي هذه الحالة فإننا نجمع التكلفة المتغيرة وتكلفة نقل الوحدة وندمج الناتج مع معدل الاستهلاك ونعرف

$$\overline{c}_{ij} = (v_i + c_{ij})d_j$$

وعندها يصبح النموذج المعدل كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le n y_i , \quad i = 1, \cdots, m$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$$

$$y_i = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1, \cdots, m$$

لاحظ في القيد الثاني أننا قمنا بضرب y_i ب n وذلك لإعطاء المرونة بإمكانية أن نزود كافة المناطق باحتياجها من واحد فقط من مراكز الخدمة.

(٣,٤) تمارين (٣)

١- لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية الثنائية التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 35x_1 + 40x_2 + 42x_3$$

وفقا للقيود:

$$7x_1 + 6x_2 + 13x_3 \le 754$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \le 30$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

أضف القيود التالية:

أ) أكثر من اثنين من متغيرات القرار لا يساوي الصفر.

ب) إذا كان $x_2 = 1$ فإن $x_3 = 1$ والعكس بالعكس.

قم بعد ذلك بحل النموذج الناتج.

٢- مسألة تلوين خريطة بأربعة ألوان. لنفرض أن خريطة مقسمة إلى مجموعة المناطق $r = \{1,2,\ldots,R\}$ وأن $x_r = 0,1,2,3$ تقابل الألوان الأربعة وأن أي منطقتين متجاورتين ستلونان بلونين مختلفين أي أن $x_r - x_s$ مختلف عن الصفر وأنه إما $x_r - x_s \geq 1$ أو $x_s - x_r \geq 1$. صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

٣- يقوم معمل بصناعة ثلاثة أنواع من المنتجات الخشبية هي كراسي، طاولات كبيرة وطاولات صغيرة. تمر عملية الصناعة عبر قسم التجميع وقسم الدهان حيث تحتاج كل قطعة في أي منهما إلى زمن محدد ويتوافر لكل من هذين القسمين زمنا معينا للعمل الأسبوعي البيانات المتعلقة في هذه المسألة معطاة كما في الجدول رقم (٣,٩). وتقضي المتطلبات أن تتم صناعة 50 طاولة من أحد النوعين أو كلاهما أو ألا يتم صناعة أي طاولة. يهدف المعمل لجعل أرباحه الأسبوعية أقل ما يمكن. صغ هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

الجدول رقم (٣,٩).

المنتج	الزمن اللازم لصناعة الوحدة(ساعة)			الزمن المتوافر
	كراسي	طاولات كبيرة	طاولات صغيرة	(ساعة/أسبوع)
قسم التجميع	2	4	3	180
قسم الدهان	4	2	2	200
ربح الوحدة	\$8	\$10	\$7	

٤- ترغب جامعة الملك سعود بشراء 1100 جهاز كمبيوتر شخصي وقد توافر لها ثلاثة عروض على النحو التالي:

العرض الأول. وسعر الجهاز فيه $ 500 لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 500 جهاز على أن تدفع الجامعة $ 5000 كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

العرض الثاني. وسعر الجهاز فيه $ 350 لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 900 جهاز على أن تدفع الجامعة $ 4000 كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

العرض الثالث. وسعر الجهاز فيه $ 250 لكن صاحبه لا يستطيع بيع الجامعة أكثر من 400 جهاز على أن تدفع الجامعة $ 6000 كتكاليف استخراج وتوصيل لكامل الطلبية.

لكن الجامعة قررت ألا تقل مشترياتها عن 200 جهاز في أي من العروض الثلاثة وهي تهدف إلى جعل التكاليف الكلية لكامل الصفقة أقل ما يمكن. صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

٥- تنتج شركة صناعية 3 منتجات تستهلك الوحدة من كل منها زمنا محددا عبر أربعة أقسام مختلفة.

البيانات الخاصة بهذه المسألة محددة كما في الجدول رقم (٣,١٠). ونظرا لوجود بعض الصعوبات فإن الشركة تشترط أنه إذا تم تصنيع أي من المنتجات الثلاثة فلا بد من إنتاج مالا يقل عن 500 وحدة من هذا المنتج وأن عدد الوحدات المنتجة من أي منتج يجب أن يكون صحيحا. المطلوب صياغة هذه المسألة مع العلم أن الشركة تهدف إلى جعل الأرباح الكلية من هذه المنتجات أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٣,١٠).

الأقسام	الساعات الأسبوعية المطلوبة لصناعة الوحدة			الساعات المتوافرة أسبوعيا
	المنتج (1)	المنتج (2)	المنتج (3)	
A	4	1	1	6000
B	2	1	1	4500
C	1	2	1	2000
D	1	2	2	2500
ربح الوحدة	3	2	2	

٦- جدولة طواقم حجز الطيران. ترغب الخطوط الجوية السعودية بجدولة طواقم الحجز عبر الهاتف وفقا لعشر فترات متصلة تبدأ من الساعة السادسة صباحا وفقا للجدول رقم (٣,١١). ومع ذلك فإن الخطوط السعودية ترغب بجعل العمل على 6 فترات (دفعات) عمل فقط على النحو المبين في الجدول رقم (٣,١٢). تهدف الخطوط السعودية لتخصيص أقل قدر ممكن من الأشخاص للعمل بحيث يتم تغطية احتياج كافة الفترات الموضحة بالجدولين (٣,١١) و(٣,١٢) . المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣,١١).

رقم الفترة	الفترة من إلى	الحد الأدنى من الأشخاص الذين تحتاجهم الفترة
1	6-8 صباحاً	3
2	8-10 صباحاً	12
3	10-12 صباحاً	13
4	12-14 مساءً	10
5	14-16 مساءً	12
6	16-18 مساءً	10
7	18-20 مساءً	6
8	20-22 مساءً	5
9	20 -12 ليلاً	4
10	12-2 ليلاً	3

الجدول رقم (٣,١٢).

رقم دفعة العمل	وقت عمل الدفعة
1	6 صباحاً–14 مساءً
2	8 صباحاً–16 مساءً
3	10 صباحاً–18 مساءً
4	18مساءً–2 صباحاً
5	10 مساءً–1 صباحاً ومن 16 مساءً–20 مساءً
6	من 8–11 صباحاً ومن 17 مساءً–21 مساءً

٧- تعتزم إحدى الشركات الصناعية أن تصرف مبلغ لا يزيد عن 4.8 مليون دولار على تطوير أربعة مشاريع. الجدول رقم (٣,١٣) يبين كل من التكلفة والربح العائد لكل من هذه المشاريع بملايين الدولارات.

الجدول رقم (٣,١٣).

المشروع	1	2	3	4
التكلفة	1.8	2.6	2.1	3
الربح	3.4	5.3	3.7	6

ترغب الشركة بمعرفة أي المشاريع سيتم تطويره لكي تحقق أكبر ربح كلي ممكن.

المطلوب

أ) صياغة هذه المسألة.

ب) تحديد القيود المقابلة لكل من الشروط التالية:

١- على الشركة أن تطور 3 مشاريع على الأقل.

٢- إذا تم اختيار المشروع (1) فعلى الشركة أن تختار المشروع (4).

٣- على الشركة أن تختار مشروعين فقط.

٤- إذا تم اختيار المشروع (2) فعلى الشركة أن تختار المشروع (3).

٥- أن تطبق الشركة الشرط (1) أو الشرط (2) وليس كليهما.

ج) اكتب المسألة المخففة لهذه المسألة.

٨- ترغب شركة بتحصيص مبلغ $ 100000 ومساحة قدرها 27000 قدم مربع لأربعة مشاريع على النحو التالي:

المشروع1: يحتاج لمبلغ $ 20000 ولمساحة قدرها 12000 قدم مربع وربحه المتوقع $5000 .

المشروع2: يحتاج لمبلغ $ 30000 ولمساحة قدرها 5000 قدم مربع وربحه المتوقع $7000 .

المشروع3: يحتاج لمبلغ $ 50000 ولمساحة قدرها 18000 قدم مربع وربحه المتوقع $10000 .

المشروع4: يحتاج لمبلغ $ 25000 ولمساحة قدرها 10000 قدم مربع وربحه المتوقع $4000 .

تهدف الشركة لجعل الربح الكلي المتوقع أكبر ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة ضمن الشروط التالية:

١- لا تستطيع الشركة أن تختار أقل من ثلاثة مشاريع من هذه المشاريع الأربعة.

٢- إذا تم اختيار المشروع 1 فلا بد من اختيار المشروع 2، أما بالنسبة للمشروعين 3 و4 فيجب ألا يتم اختيارهما معا.

٩- تلقت شركة أربعة عروض من داخل المحافظة ومن خارجها لتنفيذ أربعة مشاريع منها اثنين من المشاريع الكبيرة (1 و 2) وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٣,١٤).

الجدول رقم (٣,١٤).

المشروع	العروض			
	1	2	3	4
1	600	630	650	690
2	550	520	530	560
3	120	140	150	140
4	170	180	190	180

ونظرا لضيق الوقت فقد قررت الشركة تخصص واحد فقط من العروض لواحد فقط من المشاريع ولكن ولأسباب اقتصادية فإن الشركة ترغب بتخصيص واحد على الأكثر من المشروعين 1 و2 لخارج المحافظة. المطلوب صياغة هذه المسألة إذا علمت أن الشركة ترغب بتنفيذ المشاريع الأربعة بأقل تكلفة ممكنة.

١٠– تعاقدت شركة لإنتاج 500 وحدة من سلعة معينة لأحد زبائنها. لدى الشركة ٣ مكائن يمكن لكل منها ان تنتج المطلوب من هذه السلعة تختلف في طاقتها الإنتاجية القصوى كما تختلف في كل من التكاليف الثابتة والمتغيرة وفقا للبيانات الموضحة بالجدول رقم (٣,١٥). ترغب الشركة بتفيذ عملية إنتاج ال 500 وحدة من السلعة المطلوبة لزبونها بأقل تكلفة ممكنة، صغ هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٣,١٥).

الماكينة	تكلفة إنتاج الوحدة	تكلفة تجهيز الماكينة (القصوى/أسبوع)	الطاقة الإنتاجية
1	1.2	60	300
2	1.4	55	250
3	1.23	50	270

١١– تعتزم شركة إنتاج منتج جديد، وقد أظهرت الدراسات أن هناك ستة أماكن محتملة لإقامة مصانع لإنتاج هذا المنتج وأنه بإمكان هذه المصانع أن تخدم أربعة مناطق مختلفة.

جميع البيانات المتعلقة بهذه المسألة معطاة في الجدول رقم (٣,١٦) وهي تشمل ما يلي: معدل الطلب الشهري لكل منطقة، الطاقة الشهرية الممكنة لكل مصنع، تكلفة إنتاج الوحدة عند كل مصنع وتكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل منطقة (التكلفة المتغيرة) والتكلفة الثابتة لدى كل مصنع. ترغب الشركة بمعرفة أي المصانع ستختار بحيث تلبي احتياج كافة المناطق وبحيث تكون التكاليف الكلية لإنتاج هذا المنتج أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.

الجدول رقم (٣,١٦).

المصانع	التكلفة المتغيرة للمناطق				الطاقة الممكنة للمصنع/شهر	التكلفة الثابتة
	1	2	3	4		
1	10	12	13	17	700 وحدة	$3000
2	11	9	10	14	750 وحدة	$3500
3	15	12	8	10	650 وحدة	$2600
4	18	15	12	9	550 وحدة	$2100
5	13	16	14	12	800 وحدة	$3900
6	18	11	8	16	600 وحدة	$2800
معدل الطلب (وحدة)	800	600	700	500		

١٢- كُلفت إحدى ورشات الإصلاح الأتوماتيكية بتنفيذ أربعة أعمال على أربعة مكائن بحيث يتم تنفيذ كل من هذه الأعمال عل ماكينة واحدة. وقد تمكنت الورشة من تقدير تكاليف تنفيذ كل من هذه الأعمال على كل من المكائن الأربعة والبيانات معطاة كما في الجدول رقم (٣,١٧). تهدف الورشة إلى تخصيص تنفيذ الأعمال الأربعة على المكائن الأربعة بشكل يجعل التكلفة الكلية لذلك أقل ما يمكن، والمطلوب:

(أ) إيجاد عدد الحلول الممكنة للمسألة. (ب) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية

الجدول رقم (٣,١٧).

الأعمال	المكائن			
	A	B	C	D
1	81	75	69	77
2	74	74	63	73
3	85	77	66	74
4	66	63	58	62

١٣– يمكن لأحد المؤتمرات أن يجتذب 100 شخص لحضوره في اليوم الواحد. يعتمد عدد الحاضرين على المحاضرين في هذا المؤتمر وهم السادة {هاني، فيصل، رعد، نبيل} وعلى وقت المحاضرة لكل منهم. البيانات محددة في الجدول رقم (٣,١٨). يرغب منظموا المؤتمر بتحديد مواعيد المحاضرات بحيث يكون عدد الحاضرين أكبر ما يمكن في كافة الأوقات الأربعة، والمطلوب:

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية.

(ب) إعادة صياغة المسألة إذا علمت أن السيد فيصل لن يشارك في إلقاء محاضرات في الفترة الأخيرة من الوقت نظرا لانشغاله بأمور أخرى.

الجدول رقم (٣,١٨).

وقت المحاضرة	المحاضر			
	هاني	فيصل	رعد	نبيل
8.30 – 10.00 صباحا	64	72	70	68
10.30 – 12.00 صباحا	87	93	90	87
2.00 – 3.30 مساء	79	84	85	86
4.00– 5.30 مساء	74	90	81	80

١٤– ترغب شركة لصناعة الأطعمة الجاهزة في فتح سبع فروع جديدة لها في إحدى المدن، وقد دلت الدراسات على وجود عشرة مواقع ممكنة لهذه الفروع. كذلك فقد تمكنت الشركة من تقدير عدد الزبائن لكل من هذه المواقع العشرة وتم بالتالي تقدير

الأرباح المتوقعة لكل فرع من الفروع السبعة. البيانات معطاة في الجدول رقم (٣,١٩) حيث يدل الرقم 1 على وجود زبائن للفرع من المنطقة المقابلة والرقم 0 على عدم وجود مثل هؤلاء الزبائن.

ترغب الشركة بعدم وجود تنافس على الزبائن من نفس المنطقة. المطلوب صياغة المسألة بحيث يكون الربح السنوي الكلي لكافة الفروع أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٣,١٩).

المنطقة	الفروع						
	1	2	3	4	5	6	7
A	1	0	0	0	0	1	0
B	1	0	0	0	0	0	1
C	1	1	0	0	0	0	0
D	0	1	0	0	1	0	1
E	0	1	0	1	0	0	0
F	0	0	1	0	0	1	0
G	0	0	1	0	1	0	1
H	0	0	1	0	1	0	0
I	0	0	0	1	0	1	0
J	0	0	0	1	0	1	1
الربح السنوي المتوقع(ألف دولار)	80	90	70	100	120	180	150

١٥– أنت مكلف بتصوير 8 لقطات لمشهدين من مسلسل تلفزيوني وتسجيلها بترتيب معين على وجهي شريط التسجيل مدة الوجه الأول 14 دقيقة ومدة الوجه الثاني 16 دقيقة. إذا علمت أن مدة كل لقطة من القطات التلفزيونية الثمانية وترتيب تواجد المشهدين في هذه اللقطات معطاة كما في الجدول رقم (٣,٢٠). والهدف هو جعل زمن تسجيل اللقطات أقل ما يمكن فالمطلوب صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية بحيث تتحقق المتطلبات التالية :

(أ) كل وجه يجب أن يحوي لقطتين من المشهد الأول.

(ب) الوجه الأول يجب أن يحوي عل الأقل ثلاث لقطات من المشهد الثاني.

(ج) اللقطة 5 أو القطة 6 يجب أن تكون على الوجه الأول.

(د) إذا كانت اللقطة 2 واللقطة 4 على الوجه الأول فيجب أن تكون اللقطة 5 على الوجه الثاني.

١٦– لديك المسألة التالية :

أوجد أفضل قيمة للدالة :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

وفقاً للقيود :

$$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le b_i \quad i = 1,2,\dots\dots\dots, m$$

لنفرض أن $k<m$ ، فالمطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي بحيث يتحقق k بالضبط من أصل m من هذه القيود.

الجدول رقم (٣,٢٠).

رقم اللقطة	رقم المشهد	الزمن اللازم /دقيقة
1	1	4
2	2	5
3	1	3
4	2	2
5	1	4
6	2	3
7	2	5
8	1و2	4

الفصل الرابع

النماذج المتقدمة

(٤,١) مقدمة

قدمنا في الفصل الثالث بعضاً من نماذج البرمجة الخطية العددية البسيطة وبعضا من تطبيقاتها في كثير من المسائل التي نواجهها في الحياة العملية. وقد اتصفت هذه النماذج ببساطتها النسبية من حيث الصياغة وطريقة الحل. سنقدم في هذا الفصل المزيد من النماذج التي يمكن صياغتها أيضا كنماذج برمجة خطية عددية ولكنها أكثر تعقيدا من سابقتها. وستكون مجمل النماذج المقدمة في الفصلين الثالث والرابع شاملة نسبيا لمعظم النماذج والتطبيقات العملية التي يمكن صياغتها وحلها كمسائل وتطبيقات للبرمجة الخطية العددية.

(٤,٢) مسألة التخصيص التربيعية
Quadratic Assignment Problem

تعتبر هذه المسألة امتدادا للمسألة (٣,٣,٦) من الفصل الثالث وفق الفرضيات التالية: لدينا n من المواقع المحتملة والتي نرغب أن نبني بها m من المنشآت (معامل أو مصانع... الخ) حيث m أصغر من أو تساوي n. لنفترض أن c_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة من الموقع i إلى الموقع j ، وأن d_{kl} هي الكمية المنقولة من المنشأة i إلى المنشأة j عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص المنشأة } k \text{ إلى الموقع } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1$ من أجل $k = 1,2,\cdots,m$ وكذلك $\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \le 1$ من أجل $i = 1,2,\cdots,n$. وعندئذ، إذا تم تخصيص المنشأة k إلى الموقع i والمنشأة l إلى الموقع j فإن تكلفة النقل المقابلة لذلك هي $c_{ij}d_{lk} + c_{ji}d_{lk}$.

وبذلك يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{m} c_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1, \quad k = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \le 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ik} = 1 \text{ أو } 0, \quad i = 1,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,m$$

ويدل القيد الأول على أن كل منشأة ستبنى في واحد فقط من المواقع، في حين يدل القيد الثاني على أن كل موقع سيشغل في واحدة على الأكثر من المنشآت.

وسنوضح هذه المسألة من خلال المثال التطبيقي التالي:

مثال (٤,١) مسألة التخصيص التربيعية لسوق تجارية

عند تصميم سوق تجاري جديد فإننا نحتاج عادة إلى اختيار مواقع لمجموعة من الوحدات المختلفة (مثل المكاتب والمتاجر والأقسام والمخازن ... إلخ) في هذا السوق من بين

جملة من المواقع الممكنة التي تناسب كل منها ، وتكون مسألتنا عندها هو أن نقرر الوحدة التي سنخصصها لكل موقع. وما يهمنا في مثل هذه الحالات عادة هو جعل مجموع المسافات التي سيقطعها الزبائن للتنقل بين الوحدات المختلفة أقل ما يمكن. وللتبسيط نفرض أن لدينا أربعة مواقع ممكنة نريد أن نشغلها بأربع وحدات مختلفة ولنفرض أن المسافات (بالأقدام) بين هذه المواقع الأربعة معطاة كما في الجدول رقم (٤,١).

الجدول رقم (٤,١).

المواقع	1	2	3	4
1	–	80	150	170
2	80	–	130	100
3	150	130	–	120
4	150	100	120	–

ولنفرض أن الوحدات التي نرغب بتخصيصها لهذه المواقع الأربعة هي سوق شامل (سوبر ماركت)، سوق حاسبات، سوق ألعاب، مكتبة شاملة، وأن العدد المتوقع للزبائن الذين سيتنقلون أسبوعيا بين هذه المواقع (الزبائن المشتركة بين المواقع) معطى كما في الجدول رقم (٤,٢).

الجدول رقم (٤,٢).

الوحدة	الزبائن المشتركة (بالآلف) بين الوحدات			
	1	2	3	4
1. سوق شامل	–	5	2	7
2. سوق حاسبات	5	–	3	8
3. سوق ألعاب	2	3	–	3
4. مكتبة شاملة	7	8	3	–

فمثلا، الرقم 5 مقابل وحدة السوق الشامل (الموقع 1) ووحدة سوق الحاسبات (الموقع2) في الجدول رقم (٤،٢) يعني أن خمسة آلاف زبون بالمتوسط سيزورون كلا من هاتين السوقين في الأسبوع. وبالعودة للجدول رقم (٤،١) نجد أن ذلك يقابل مسافة قدرها 5×80 =400 ألف قدم. ومن الواضح أن متغيرات القرار في مثل هذه المسألة هي المتغيرات الثنائية القيم التالية:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا خصصت الوحدة } i \text{ إلى الموقع } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ووفقا للبيانات في الجدولين رقمي (٤،١) و(٤،٢) يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$\begin{aligned} Z = {} & 5(80x_{11}x_{22} + 150x_{11}x_{23} + 170x_{11}x_{24} + 80x_{12}x_{21} + 130x_{12}x_{23} + 100x_{12}x_{24} \\ & + 150x_{13}x_{21} + 130x_{13}x_{22} + 120x_{13}x_{24} + 170x_{14}x_{21} + 100x_{14}x_{22} + 120x_{14}x_{23}) \\ & + 2(80x_{11}x_{32} + 150x_{11}x_{33} + 170x_{11}x_{34} + 80x_{12}x_{31} + 130x_{12}x_{33} + 100x_{12}x_{34} \\ & + 150x_{13}x_{31} + 130x_{13}x_{32} + 120x_{13}x_{34} + 170x_{14}x_{31} + 100x_{14}x_{32} + 120x_{14}x_{33}) \\ & + 7(80x_{11}x_{42} + 150x_{11}x_{43} + 170x_{11}x_{44} + 80x_{12}x_{41} + 130x_{12}x_{43} + 100x_{12}x_{44} \\ & + 150x_{13}x_{41} + 130x_{13}x_{42} + 120x_{13}x_{44} + 170x_{14}x_{41} + 100x_{14}x_{42} + 120x_{14}x_{43}) \\ & + 3(80x_{21}x_{32} + 150x_{21}x_{33} + 170x_{21}x_{34} + 80x_{22}x_{31} + 130x_{22}x_{33} + 100x_{22}x_{34} \\ & + 150x_{23}x_{31} + 130x_{23}x_{32} + 120x_{23}x_{34} + 170x_{24}x_{31} + 100x_{24}x_{32} + 120x_{24}x_{33}) \\ & + 8(80x_{21}x_{42} + 150x_{21}x_{43} + 170x_{21}x_{44} + 80x_{22}x_{41} + 130x_{22}x_{43} + 100x_{22}x_{44} \\ & + 150x_{23}x_{41} + 130x_{23}x_{42} + 120x_{23}x_{44} + 170x_{24}x_{41} + 100x_{24}x_{42} + 120x_{24}x_{43}) \\ & + 3(80x_{31}x_{42} + 150x_{31}x_{43} + 170x_{31}x_{44} + 80x_{32}x_{41} + 130x_{32}x_{43} + 100x_{32}x_{44} \\ & + 150x_{33}x_{41} + 130x_{33}x_{42} + 120x_{33}x_{44} + 170x_{34}x_{41} + 100x_{34}x_{42} + 120x_{34}x_{43}) \end{aligned}$$

وفقا للقيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \qquad \text{(الوحدة 1)}$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1 \qquad \text{(الوحدة 2)}$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1 \qquad \text{(الوحدة 3)}$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \qquad \text{(الوحدة 4)}$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \qquad \text{(الموقع 1)}$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \qquad \text{(الموقع 2)}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \qquad \text{(الموقع 3)}$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \qquad \text{(الموقع 4)}$$

$$x_{ik}=1 \text{ أو } 0, \quad i,j=1,\cdots,4$$

وكما نلاحظ فإن دالة الهدف Z تمثل مجموع المسافات المقطوعة من كافة الأزواج الممكنة لوحدات السوق إلى كافة المواقع المخصصة والممكنة.

فمثلا يعبر الحد الأول

$$\begin{aligned}5(&80x_{11}x_{22}+150x_{11}x_{23}+170x_{11}x_{24}+80x_{12}x_{21}+130x_{12}x_{23}+100x_{12}x_{24}\\&+150x_{13}x_{21}+130x_{13}x_{22}+120x_{13}x_{24}+170x_{14}x_{21}+100x_{14}x_{22}+120x_{14}x_{23})\end{aligned}$$

من الدالة Z أعلاه عن مجموع المسافات المقطوعة من كافة الزبائن بين الوحدة الأولى وباقي الوحدات ابتداء من الوحدة الثانية وحتى الوحدة الرابعة ذلك أن الزبائن الذين يصلون إلى وحدة ما قد ينتقلون إلى أية وحدة أخرى من تلك التي وصلوا إليها، وهكذا نفهم بقية حدود هذه الدالة. أما القيود الثمانية الأولى فتفيد بأنه تم تخصيص كل وحدة لواحد فقط من المواقع وكل موقع لواحدة فقط من الوحدات.

(٤,٣) مسائل التوافق
Matching Problems

إن مسائل التخصيص البسيطة والعامة التي تم استعراضها في الفصل الثالث ومسألة التخصيص التربيعية التي تحدثنا عنها في الفقرة السابقة تقسم الأشياء لصنفين مختلفتين وفقا للمعيار"خصص أو لا تخصص".

وتعتبر مسائل التوافق التي نحن بصددها في هذه الفقرة أعم من مسائل التخصيص هذه، حيث نهدف إلى تحقيق التوافق بين الأشياء التي تأتي من صنف واحد. ومثال ذلك عمليات التوافق بين سماعات الحاسبات الشخصية. إن متغيرات القرار في مسائل التوافق تكون على النحو التالي:

$$x_{ii'} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم التوافق بين } i \text{ و } i' \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولتجنب التكرار فإننا سنفرض $i' > i$. فإذا فرضنا أن $c_{ii'}$ هو العائد (تكلفة أو ربح) الناتج من توافق i مع i'، فإن النموذج الرياضي لمسائل التوافق يصبح على الشكل التالي:

صغر (أو كبر) الدالة:

$$Z = \sum_{i} \sum_{i'>i}^{m} c_{ii'} x_{ii'}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i'<i} x_{i'i} + \sum_{i'>i}^{m} x_{ii'} = 1 \text{ ،} \quad \text{لجميع قيم } i$$

$$x_{ii'} = 1 \text{ أو } 0 \quad , \quad \text{من أجل جميع } i \text{ و } i' > i$$

لاحظ أن دالة الهدف تمثل مجموع تكلفة أو ربح لعمليات التوافق. إن السبب في استخدام كلا من $i'>i$ و $i'<i$ في القيود يعود إلى أنه في عملية التوافق بين i و i' فإنه قد يكون $i'>i$ لبعض أزواج التوافق و $i'<i$ لبعضها الأخر.

(٤,٤) مسألة البائع المتجول

Traveling Salesman Problem (TSP)

تتلخص مسألة البائع المتجول في أن شخصا ما (بائع مثلا) يرغب بزيارة n مدينة مختلفة ابتداءً من مدينته (مسقط رأسه) بحيث يزور كل من هذه المدن مرة واحدة فقط ليعود أخيرا إلى بيته (مدينته التي بدأ منها) بأقصر طريق ممكنة. سنرمز للمسافة بين المدينتين (i,j) ، وهي مسافة معلومة، بالرمز c_{ij}. فإذا كانت المسافة المقطوعة بين المدينتين (i,j) تساوي المسافة المقطوعة بين المدينتين (j,i) أي إذا كان $c_{ij}=c_{ji}$ قلنا عن المسألة إنها *متناظرة* (*Symmetric*) وإلا قلنا عنها إنها *غير متناظرة* (*Asymmetric*). وعندما يتعذر الذهاب من المدينة i إلى المدينة j جاز لنا أن نضع c_{ij} مساوية لقيمة كبيرة جدا أو أن نحذف المتغيرات المقابلة من النموذج الرياضي للمسألة. وفي جميع الحالات تصبح المسألة هي: إيجاد الطريق (المثلى) التي تجعل مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول بين المدن (ابتداء من مدينته والعودة إليها) أقل ما يمكن.

(٤,٤,١) صياغة مسألة البائع المتجول غير المتناظرة كمسألة برمجة عددية.

ILP Formulation of the Asymmetric (TSP)

كما أشرنا أعلاه فإن عدم التناظر في مسألة البائع المتجول تعني أن $c_{ij}\neq c_{ji}$ بالضرورة. وباستخدام المتغيرات الثنائية القيم التالية:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{إذا تم استخدام الطريق من المدينة } i \text{ إلى المدينة } j \text{ في الجولة}\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

يصبح *"النموذج الرياضي المبدئي للمسألة* "غير المتناظرة" شبيها بنموذج مسائل التخصيص وهو كما يلي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{(مجموع المسافات المقطوعة)}$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_{ij} = 1 \ \text{أو} \ 0, \quad i = 1, \cdots, n;\ j = 1, \cdots, n$$

وكما نلاحظ فإن المجموعة الأولى من القيود تضمن بأن البائع سيمر في كل مدينة مرة واحدة فقط ، بينما تضمن المجموعة الثانية من القيود بأن البائع سيغادر كل مدينة مرة واحدة فقط. إن تسميتنا للنموذج بأنه "*مبدئي*" يعود إلى أنه **لا** *يضمن* لنا "*الارتباط*" بين عقده ، إذ أنه قد يؤدي إلى حلول على شكل جولة جزئية (Sub-tour) والتي نعني بها بأنها مجموعة من العقد (المدن) التي تبدأ وتنتهي بنفس العقدة ولكنها لا تمر إلا بمجموعة جزئية من ال n عقدة. فمثلا ، لو أخذنا الشكل رقم (٤.١) الذي يحوي جولتين جزئيتين وتذكرنا تعريف المتغيرات الثنائية القيم فإنه يمكننا التخلص من مثل هذه الجولات الجزئية بأن نضيف القيود التالية :

$$\begin{aligned} x_{78} + x_{89} + x_{97} &\leq 2 \\ x_{12} + x_{23} + x_{34} + x_{45} + x_{56} + x_{61} &\leq 5 \end{aligned}$$

ويمكننا التخلص من مثل هذه الإشكاليات بأن نقرن متغيرا u_i بكل مدينة i ثم نضيف القيود التالية:

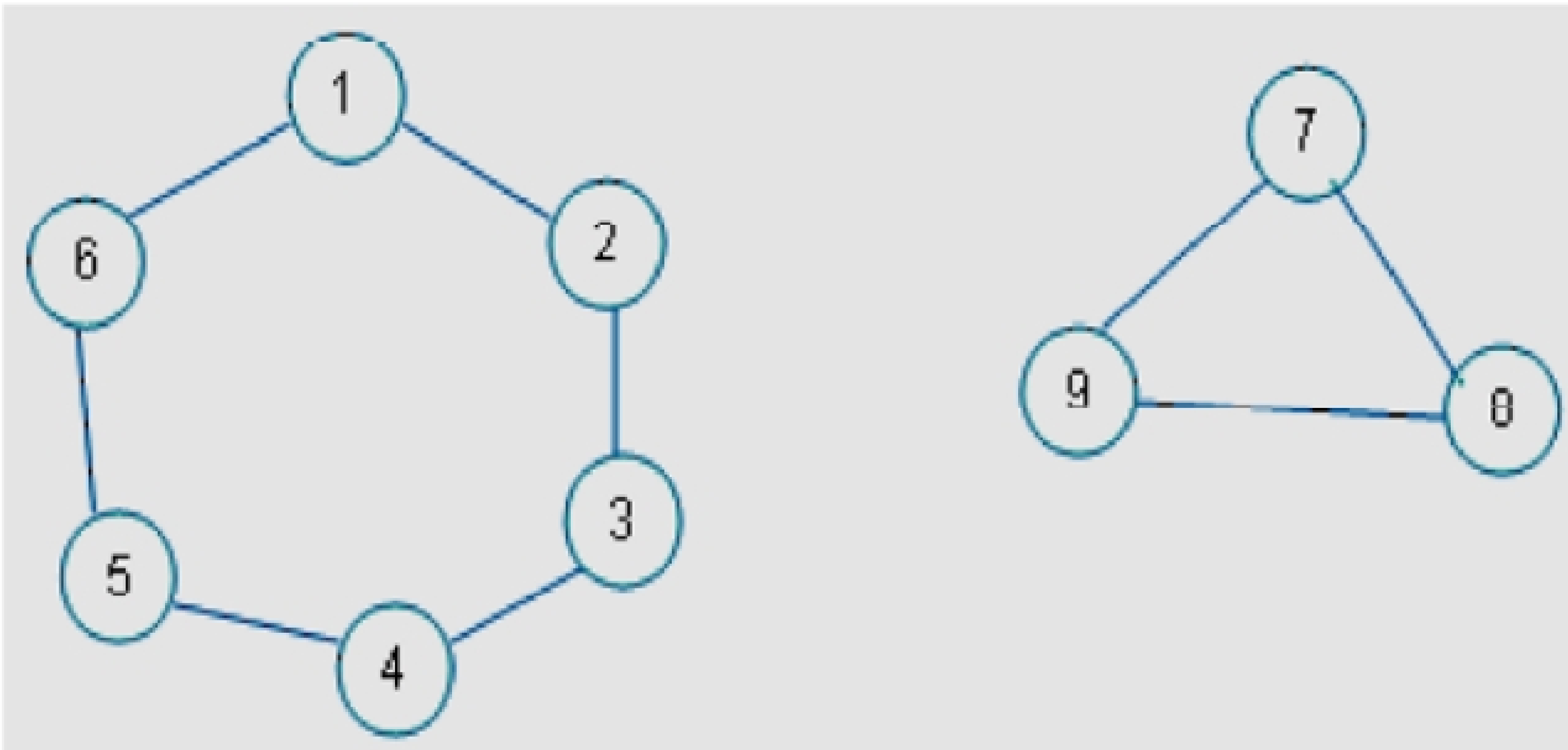
$$u_i - u_j + nx_{ij} \le n-1, \quad i, j = 2, \cdots, n; \quad i \ne j$$

وعندئذ فإن أي حل يحتوي على جولة جزئية لن يحقق القيود الأخيرة. ولإثبات ذلك لنأخذ أي جولة جزئية لا تحوي مدينة (البائع المتجول) البداية فنلاحظ عندها أنه لو جمعنا جميع المتراجحات المقابلة للقيود الأخيرة والتي يكون فيها $x_{ij} = 1$ في مثل هذه الجولة الجزئية، فإن الحدود التي من الشكل $a_i - a_j$ تفني بعضها البعض لنصل في النهاية إلى المتراجحة التالية $nN \le (n-1)N$ حيث N هي عدد الأضلاع في الجولة الجزئية المأخوذة، وهي متراجحة غير صحيحة مما يدل على صحة الاستنتاج الذي نريد. ولتوضيح ذلك عمليا نعود إلى الشكل رقم (٤،١) فنجد أن القيود الأخيرة المقابلة للجولة الجزئية $9 \to 8 \to 7$ هي $u_7 - u_8 + 9 \le 8$ ، $u_8 - u_9 + 9 \le 8$ ، و $u_9 - u_7 + 9 \le 8$ ، والتي تقود إلى المتراجحة غير الصحيحة $27 \le 24$. من جهة ثانية، يمكن لهذه القيود أن تتحقق عندما لا يكون هناك جولات جزئية. لبيان ذلك لنفرض أن $a_i = k$ إذا كانت المدينة i هي المدينة رقم k في ترتيب الزيارة في جولة البائع عندئذ: عندما يكون $x_{ij} = 1$ نجد أن $a_i - a_j + n = k - (k+1) + n = n-1$.
وبما أن $1 \le a_i \le n \; (i = 2, \cdots, n)$ فإن الفرق $a_i - a_j$ يكون دائما أقل من أو يساوي $n-1$ لكل الأزواج (i, j) وبالتالي فإن القيود تكون محققة عندما يكون $x_{ij} = 0$.

ثمة طريقة أخرى لإلغاء الجولات الجزئية وذلك بإضافة قيود من الشكل التالي:
من أجل كل المجموعات S التي تحقق $1 \le |S| \le n-1$ فإن $\sum_{(i,j) \in (S \times \bar{S})} x_{ij} \ge 1,$

حيث تمثل S مجموعة جزئية حقيقية من المدن التي سيمر بها البائع. وللقيد الأخير الدلالة بأن كل جولة يجب أن تصل بين نقاط من S ونقاط خارج S مرة واحدة على

الأقل. فعلى سبيل المثال، لو أخذنا الشكل(٤,٢)، والذي يبين عملية الربط بين 6 نقاط، فيمكننا تجنب الجولات الجزئية بين نقاط المجموعة $S=\{1,3,5\}$ وذلك بأن نضيف قيدا يضمن لنا شطب الجولات الجزئية وهذا القيد هو $x_{12}+x_{34}+x_{56}\geq 1$.



الشكل رقم (٤,١).

ثمة طريقة ثالثة للتخلص من الجولات الجزئية هي بإضافة قيود من الشكل التالي أجل كافة المجموعات S التي تحقق $2\leq|S|\leq\frac{n}{2}$ *فإن* $\sum_{(i,j)\in S\times S} x_{ij}\leq|S|-1$. فمثل هذا القيد الأخير سيمنع تشكل جولات جزئية أو دورات بحجم أقل من n . ويعود السبب في ذلك إلى أن أي جولة جزئية مستخلصة من عقد من المجموعة الجزئية S يجب أن تحوي $|S|$ بالضبط من أضلاع الربط بين العقد. وبعبارة أخرى فإن مدلول القيد الأخير يعني أنه لأي مجموعة جزئية S عدد عقدها أقل من n فإن عدد الأضلاع التي تربط عقد هذه المجموع الجزئية يجب أن يقل بواحد عن عدد العقد في S بغض النظر فيما إذا كانت هذه الأضلاع من أو ليست من جولة جزئية ما.

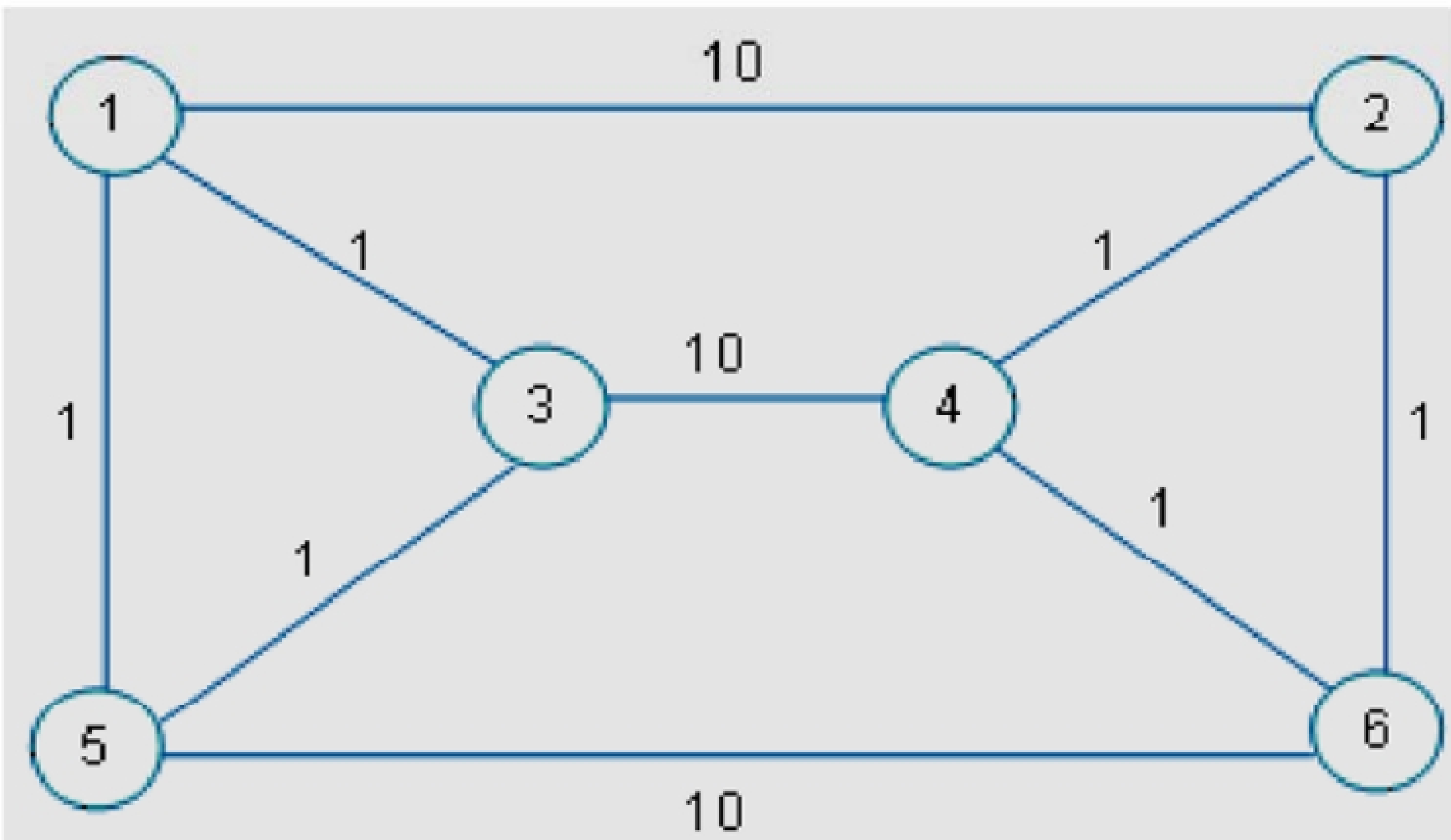
فلو كان $|S|=2$ عندئذ يكون لدينا $\binom{n}{2}$ من القيود من الشكل التالي :

$$x_{12} + x_{21} \leq 1$$
$$x_{13} + x_{31} \leq 1$$
$$x_{14} + x_{41} \leq 1$$

وفي هذا الصدد تجدر الملاحظة بأننا لا نحتاج أن ندرج مجموعات جزئية تحوي أكثر من $\frac{n}{2}$ من العقد (النقاط) والسبب في ذلك هو أن التخلص من جولات جزئية بحجم k مثلا سيقود تلقائيا إلى التخلص من الجولات الجزئية المتممة بحجم $n-k$.

إضافة إلى كل ما تقدم فإن أهم الصعوبات التي نواجهها في حل هذا النوع من مسائل البائع المتجول، والمتعلق بالقيود التي تخلصنا من الجولات الجزئية، يكمن في أمرين.

أولهما: عندما نواجه مسائل يكون فيها عدد هذه القيود مساويا ل $2^{n-1}-n-1$ وهو أسي بحجم المسألة (n = عدد المدن)، أي أنه يزداد بشكل كبير مع تزايد n ، فعندئذ سيكون صعبا علينا أن نورد كافة القيود التي تخلصنا من كافة الجولات الجزئية.



الشكل رقم (٢,٤).

ثانيهما: هو عدم ضمان المحافظة على القيم العددية الصحيحة للمتغيرات الثنائية القيم x_{ij}. فلو استبدلنا المسألة الأصلية بالمسألة المخففة (حيث $0 \le x_{ij} \le 1$ لكافة قيم i, j) فإن ذلك لن يضمن لنا الوصول إلى قيم عددية صحيحة وممكنة لمتغيرات المسألة الأصلية x_{ij}.

ولتوضيح بعض نقاط مسألة البائع المتجول غير المتناظرة نورد المثال التالي:

مثال (٤,٢)

المصفوفة التالية تتعلق ببيانات مسألة بائع متجول غير متناظرة بين 6 مدن: إذا افترضنا أن البائع المتجول سيبدأ من مدينة ما من المدن الستة وأنه سيزور كلاً منها لمرة واحدة فقط فإن هدفه عندئذ هو جعل المسافة الكلية التي سيقطعها أقل ما يمكن.

	1	2	3	4	5	6
1	- -	27	43	16	30	26
2	7	- -	16	1	30	25
3	20	13	- -	35	5	0
4	21	16	25	- -	18	18
5	12	46	27	48	- -	5
6	23	5	5	9	5	- -

الحل

لنلاحظ أولا أن مصفوفة المسافات المعطاة في المثال تدل أن طرق الربط بين المدن الستة هي طرق موجهة (وهي مسألة غير متناظرة) ويبلغ عددها 36 طريقا. ومن الواضح أن هذا العدد سيقود إلى عدد كبير جدا من الجولات الممكنة للبائع المتجول. ويبين الشكل رقم (٤,٣) أحد هذه الجولات والتي تتميز بسلسلة متعاقبة من الطرق الموجهة وهي:

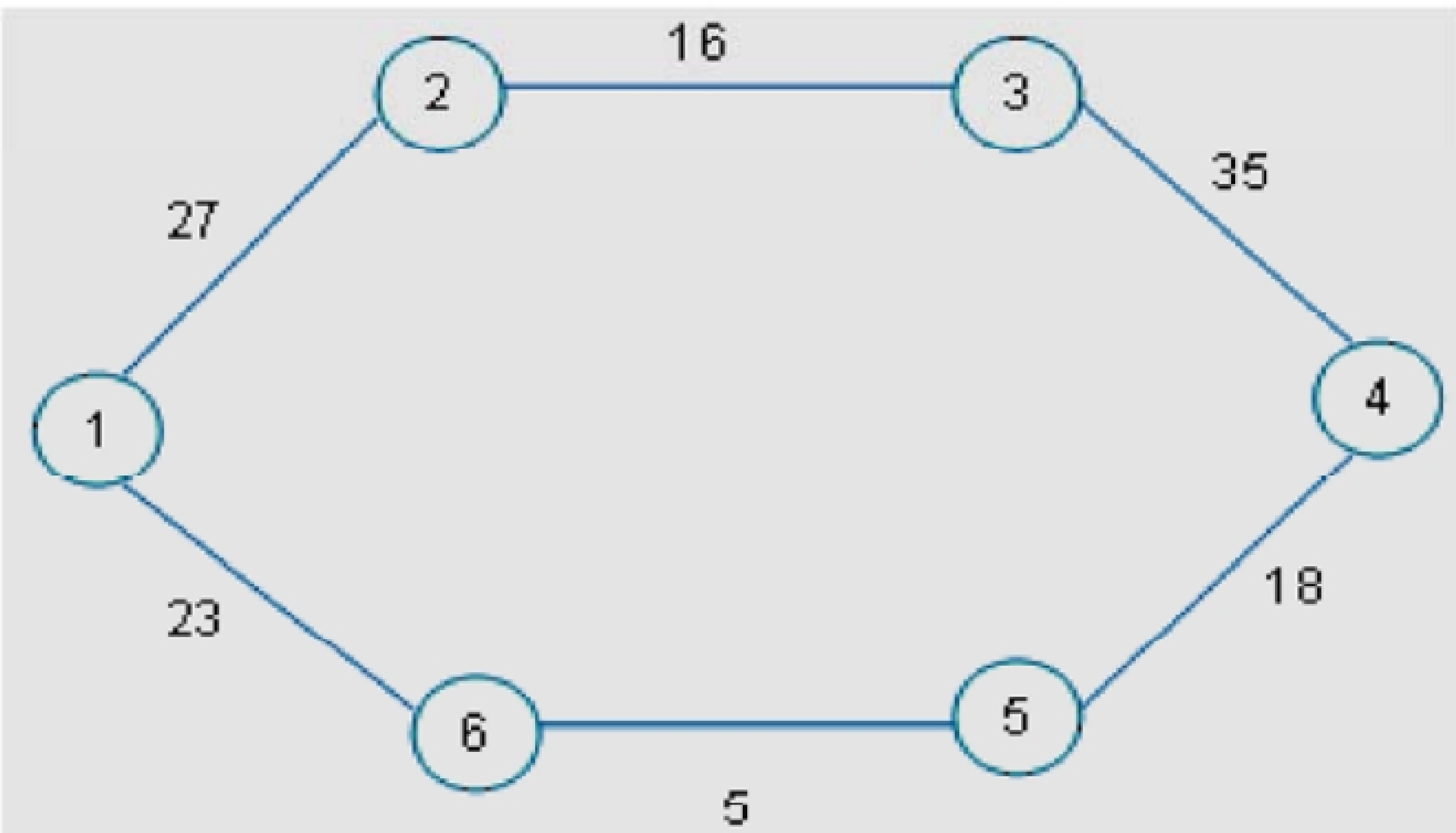
$$(1,2) \rightarrow (2,3) \rightarrow (3,4) \rightarrow (4,5) \rightarrow (5,6)$$

وطول هذه الجولة (قيمة دالة الهدف) هو $Z = 124$.

الآن إذا أسقطنا من حسابنا جميع القيود المتعلقة بالجولات الجزئية، التي أشرنا إليها سابقاً، (والتي سنشير إليها بالصياغة المخففة) فإن ذلك سيقود مباشرة إلى الحل التالي $\{(1,4),(4,2),(2,1),(3,5),(5,6),(6,3)\}$ وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل هي $Z = 54$. وتحدد هذه القيمة حدا أدنى لقيمة دالة الهدف الأصلية (طول المسافة المقطوعة) عند الحل الأمثل (الجولة المثلى لمسألة البائع المتجول). لكن هذا الحل غير ممكن لأنه يحوي الجولات الجزئية التالية:

$$(1,4) \rightarrow (4,2) \rightarrow (2,1)$$

$$(3,5) \rightarrow (5,6) \rightarrow (6,3)$$



الشكل رقم (٤,٣).

وللتخلص من الجولة الجزئية الأولى والمتعلق بالمجموعة $S = \{1,2,4\}$ فإننا نضيف القيد التالي :

$$x_{12} + x_{21} + x_{14} + x_{41} + x_{24} + x_{42} \leq 2$$

إلى الصياغة المخففة. وكما يمكن ملاحظته فإن إضافة القيد الأخير يخلصنا من الجولة الجزئية الثانية ويخلصنا أيضا من الجولة الجزئية الأولى بالاتجاه المعاكس وهي :

$$(1,2) \rightarrow (2,4) \rightarrow (4,1)$$

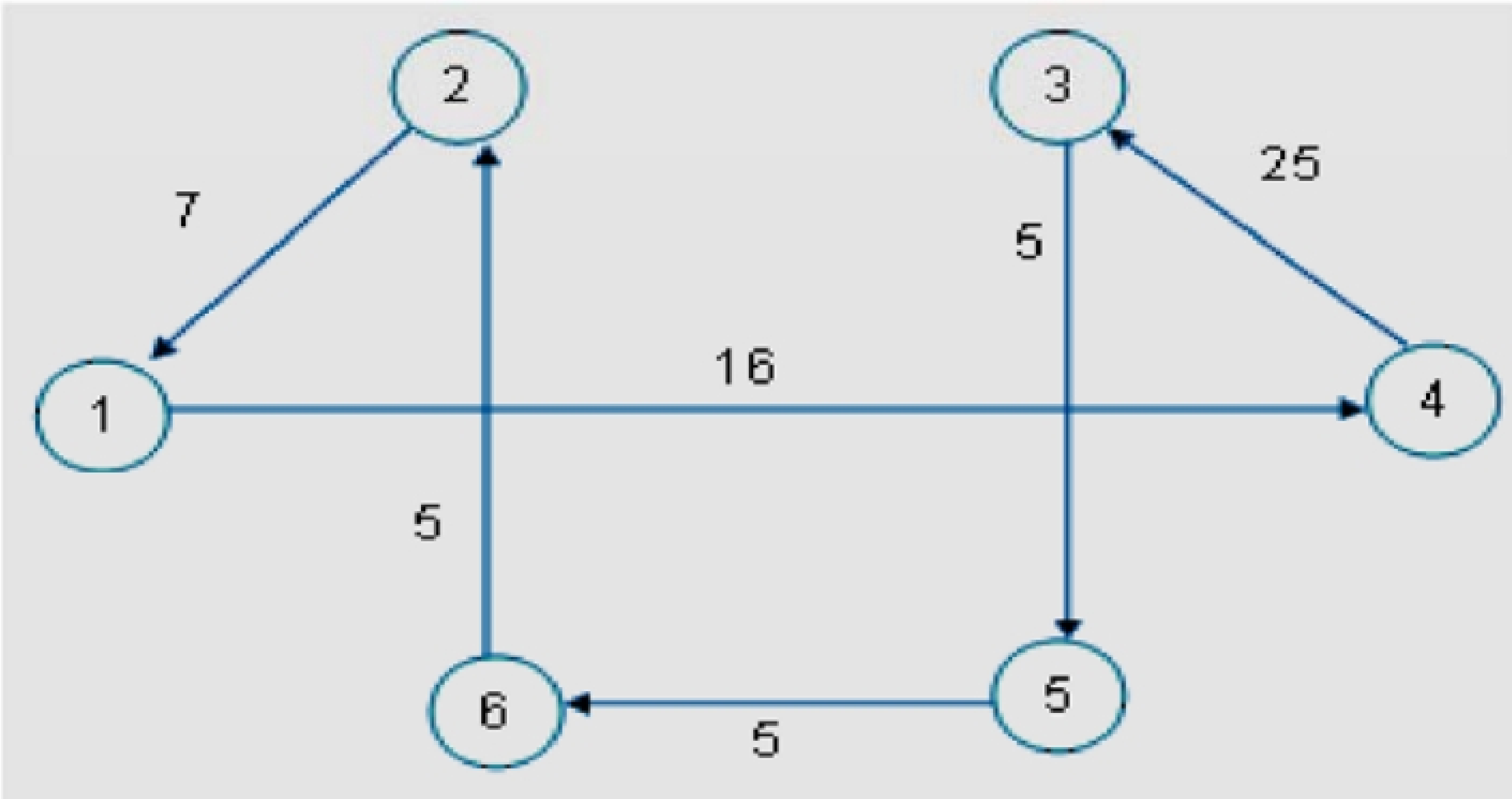
وبعد إدخال القيد الأخير وحل المسألة الناتجة نجد الحل التالي :

$$\{(1,4),(4,3),(3,5),(5,6),(6,2),(2,1)\}$$

وقيمته $Z = 63$ ، وقد مثلنا هذا الحل بالشكل (٤،٤). وكما نلاحظ فإن هذا الحل لا يحوي جولات جزئية فهو بالتالي حلاً أمثلياً (جولة مثلى).

ملاحظة (٤،١)

إن فكرة حل النموذج المخفف للمثال الأخير ثم إضافة القيود التي تخلصنا من الجولات الجزئية بالتدريج هي إحدى الطرق المتبعة في حل هذا النوع من النماذج. وتعتمد فلسفة هذه الطريقة ضمنيا على محاولة حل كامل النموذج باستخدام طريقة التعداد الكلي مع الإدماج التدريجي للقيود اللازمة للتخلص من الجولات الجزئية. ويشار لمثل هذه الطريقة عادة باسم "*الحد والقطع*" (*Branch and Cut*).



الشكل رقم (٤,٤).

(٤,٤,٢) صياغة مسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية.

ILP Formulation of the Symmetric (TSP)

إن معظم الصياغات المتعلقة بالحالة المتناظرة تفترض أن $i < j$ وتعرف متغيرات القرار x_{ij} على الشكل التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا احتوت الجولة على ضلع يربط } i \text{ بـ } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

نؤكد ثانية أن المتغيرات x_{ij} مقصورة فقط من أجل $i < j$. وكما نلاحظ فإن هذا الاقتصار هو اقتصار ملائم لأنه يجنبنا التكرار الذي يمكن أن يقع للسبب التالي: إن وجود ضلع يصل بين المدينة i والمدينة j يعني ضمنا وجوده بين j و i وللضلعين نفس التكلفة. وبذلك يكون النموذج الرياضي لمسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية على النحو التالي:

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{i} \sum_{j>i} c_{ij} x_{ij}$$ (مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول)

وفقا للقيود :

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2,$$ لجميع قيم i

لجميع المجموعات الجزئية الحقيقية S حيث $|S| \geq 3$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S,\, j>i} x_{ij} + \sum_{i \notin S} \sum_{j \in S,\, j>i} x_{ij} \geq 2,$$

$x_{ij} = 1$ أو 0 ، لجميع قيم $i, j;\ j > i$

لاحظ أن المجموعة الأولى من القيود تبين أن قيم اثنين بالضبط من المتغيرات x_{ij} المتعلقة في مدينة ما i يمكن أن تكون مساوية للواحد في أي حل ممكن للمسألة، أحدهما ينتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تسبقها في جولة ممكنة (حل ممكن) والأخرى تنتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تليها في هذه الجولة . فلو أخذنا $i = 4$ في الشكل رقم (٤،٢) أعلاه، على سبيل المثال، لكان لدينا

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} = 2$$

وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود عملية التخلص من الجولات الجزئية حيث تؤدي هذه القيود إلى وجوب احتواء أي جولة على نقاط من S ونقاط من خارج S مرتين على الأقل.

ولتوضيح مسألة البائع المتجول المتناظرة نسوق المثال التالي :

مثال (٤,٣)

بالعودة إلى الشكل رقم (٤,٣) والذي يبين عملية ربط ممكنة بين 6 مدن حيث تدل الأرقام الموضحة على الأضلاع على الزمن اللازم لاجتياز المسافة. الهدف هنا هو أن نجد الجولة ذات الزمن الأصغر والتي تسمح لنا بالمرور في كل مدينة مرة واحدة بالضبط مستخدمين أضلاع الربط الموضحة في هذا الشكل وأن نجيب بنفس الوقت على كل مما يلي:

أ) أن نوضح لماذا يمكن اعتبار هذه المسألة كمسألة (بائع متجول) متناظرة.

ب) إيجاد دالة الهدف لهذه الحالة (الموضحة بالشكل رقم (٤,٣)).

ج) تحديد القيود الخاصة بكل مدينة والمتعلقة بهذه الحالة.

الحل

أ) نظراً لأن المسألة تتطلب استخدام جولة مغلقة بحيث تسمح بزيارة كل مدينة فهي مسألة بائع متجول. وهذه المسألة متناظرة لأن الوقت اللازم للمرور من i إلى j هو نفس الوقت اللازم للمرور من j إلى i.

ب) بحسب بيانات الشكل رقم (٤,٣) فإن دالة الهدف المطلوبة هي

$$Z = 10x_{12} + x_{13} + x_{15} + x_{24} + x_{26} + 10x_{34} + x_{35} + x_{46} + 10x_{56}$$

(المطلوب تصغير هذه الدالة).

ج) بحسب بيانات الشكل رقم (٤,٣) فإن مجموعة القيود الخاصة بالمدن الستة هي

(العقدة 1) $$x_{12} + x_{13} + x_{15} = 2$$

(العقدة 2) $$x_{12} + x_{24} + x_{26} = 2$$

(العقدة 3) $x_{13} + x_{34} + x_{35} = 2$

(العقدة 4) $x_{24} + x_{34} + x_{46} = 2$

(العقدة 5) $x_{15} + x_{35} + x_{56} = 2$

(العقدة 6) $x_{26} + x_{46} + x_{56} = 2$

(٤,٥) المسألة الموجهة لأقل شجرة متفرعة

Directed Minimal Spanning Tree (MST)

تبحث هذه المسألة في إيجاد رسم موجه جزئي $G' = (N, A')$ غير حاوي على دورات من رسم موجه $G = (N, A)$ بحيث يكون مجموع أطوال أضلاع هذا الرسم الجزئي أقل ما يمكن، حيث ترمز N لمجموعة عقد الرسم G وترمز A لمجموعة أضلاعه الموجهة وحيث A' هي مجموعة جزئية من A. ويمكننا في عملية إيجاد مثل هذا الرسم الجزئي G' أن نبدأ من أي نقطة من عقد الرسم G نسميها بعد اختيارها باسم "*العقدة الأساسية*"(*Root Node*). وتقتضي الشروط المتعلقة بهذه المسألة أنه يمكن أن ينطلق من هذه العقدة الأساسية واحد أو أكثر من الأضلاع الموجهة بينما ينطلق من باقي العقد ضلع موجهة واحدة على الأكثر. وكما نلاحظ فإن هناك أوجه شبه كبير بين هذه المسألة ومسألة البائع المتجول. فلو اعتبرنا أن العقدة (1) هي العقدة الأساسية في رسم موجه عدد أضلاعه n وعرفنا المتغيرات x_{ij} كما يلي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الضلع الموجه } (i, j) \text{ في الرسم } G' \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن x_{ij} هي متغيرات القرار. ولو رمزنا بالرمز c_{ij} لطول الضلع الموجه (i, j) لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} \leq 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 2, \cdots, n$$

لجميع المجموعات الجزئية S حيث

$$\sum_{(i,j) \subset S \times S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad , \quad \text{و} \quad 2 \leq |S| \leq \frac{n}{2}$$

$$x_{ij} = 1 \;\; \text{أو} \;\; 0, \quad i \neq j = 1, \cdots, n$$

لنوضح المسألة بالمثال التالي:

مثال (٤،٤)

لنتصور الرسم (الشبكة) الناتج من مثال (٤،٢). فيمكننا أن نتحقق أن الشكل رقم (٤،٥) هو شجرة متفرعة من هذا الرسم مجموع أطوال أضلاعها = 100.

وكحالة خاصة من مسألة البائع المتجول فإننا سنحل المسألة المخففة والتي نحصل عليها بإهمال القيود التي يمكن أن تقود لجولات جزئية، فنجد الحل التالي (التكرار 0)

$$\{(1,4),(3,6),(3,5),(6,2),(6,3)\}$$

وقيمته $Z = 31$. لكن هذا الحل يحوي على الدورة $(3,6) \rightarrow (6,3)$ ولذا علينا إضافة القيد التالي:

$$x_{63} + x_{36} \leq 1$$

وإعادة حل المسألة من جديد (التكرار الأول). وبطريقة مماثلة نجد أن علينا أن نضيف القيد التالي للتكرار الثاني:

$$x_{56} + x_{65} \leq 1$$

والقيد التالي للتكرار الثالث:

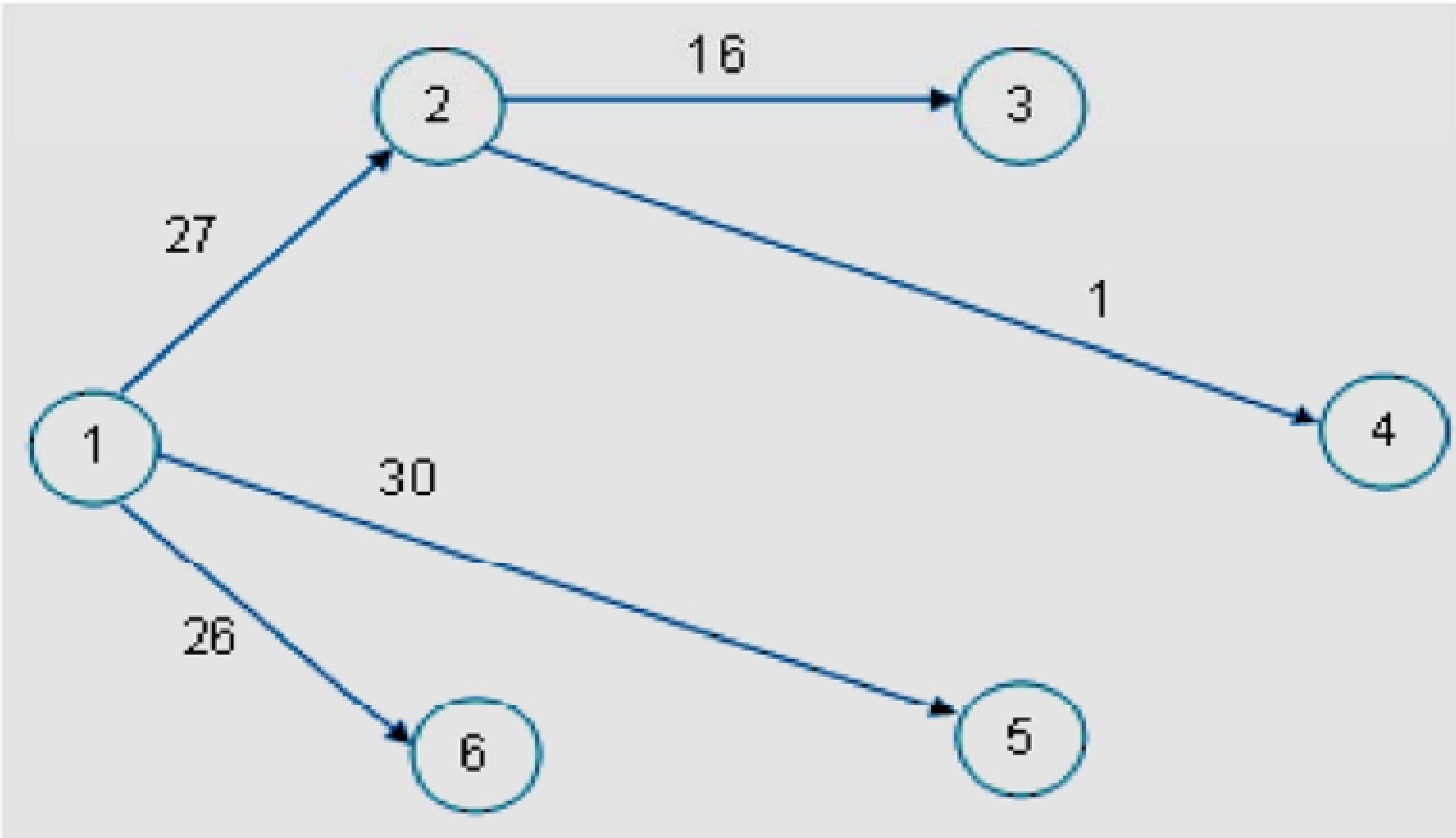
$$x_{35} + x_{53} + x_{56} + x_{65} + x_{63} + x_{36} \leq 2$$

ونحصل بعد ذلك على الحل التالي:

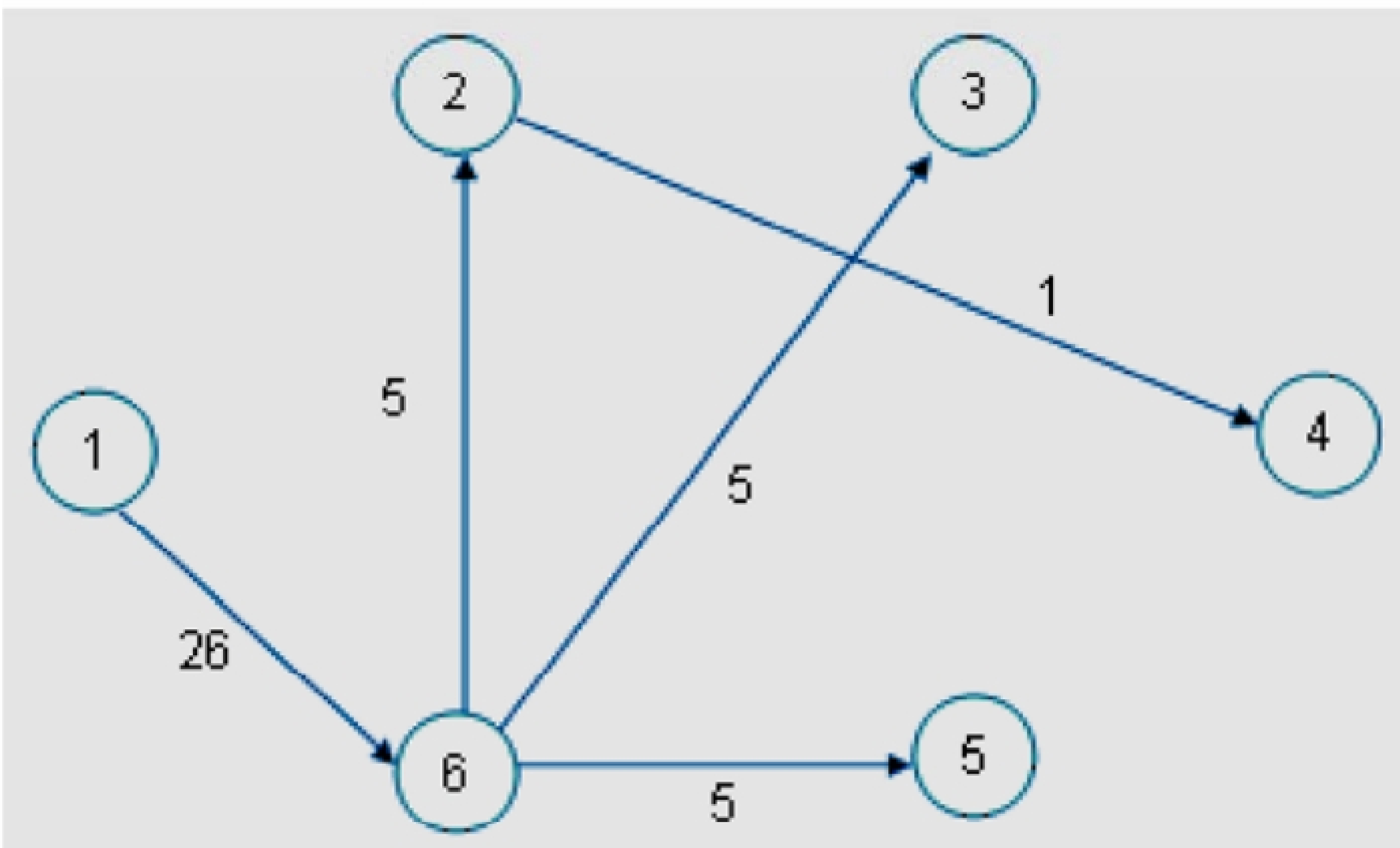
$$\{(1,6),(6,2),(6,3),(6,5),(2,4)\}$$

وقيمته $Z = 42$. وهذا الحل ممثل بالشكل رقم (٤.٦)

وهو حل أمثل وقد تم الوصول إليه بطريق مماثلة لتلك التي استخدمت في حل مسألة البائع المتجول الأخيرة. ونشير هنا إلى وجود خوارزميات أكثر فعالية لحل المسألتين الموجهة وغير الموجهة لأقل شجرة متفرعة.



الشكل رقم (٤,٥).



الشكل رقم (٤,٦).

(٤,٦) مسائل الحزم والتغطية والتجزئة
Set Packing, Set Covering, and Set Partitioning Problems

تتعلق القيود في هذه المسائل الثلاث مع مجموعة من العناصر، A مثلا، وبعضا من المجموعات الجزئية B_i من A.

(٤,٦,١) مسائل الحزم. Set Packing Problems

في مسائل الحزم يتم اختيار بعض عناصر A أو كلها لتغطيتها بالمجموعات الجزئية B_i. أي أن كل عنصر من A يظهر في عملية التغطية هذه مرة واحدة على الأكثر، ولذلك فإن القيود هنا تكون من الشكل "أصغر من أو تساوي". والهدف في مسائل الحزم هو جعل العائد الناتج من تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أكبر ما يمكن.

من الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة هي:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار العنصر } x_i \text{ من A لتغطيته} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولو عرفنا c_i بأنها العائد الناتج من تغطية العنصر x_i بأحد المجموعات الجزئية B_i وعرفنا المقادير a_{ij} كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تمت تغطية } x_i \text{ بـ } B_j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

يصبح النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي:

كبر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \ \text{أو} \ 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وكأمثلة تطبيقية على هذا النوع من المسائل نسوق ما يلي

مثال (٤,٥)

في عملية جدولة عدد من الاجتماعات لعدد من الأشخاص، لنفرض أن لدينا n اجتماعا تجب جدولتها للأسبوع المقبل. وللتبسيط لنفرض أن كل اجتماع يستغرق ساعة واحدة وأنه يتوافر في الأسبوع المقبل n من الساعات المختلفة والمناسبة لمثل هذه الاجتماعات وأن مجموع عدد الأشخاص المعنيين بهذه الاجتماعات هو k. لنعرف المقادير a_{ij} كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا التحق الشخص } i \text{ بالاجتماع } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنفرض أن الهدف هو جدولة أكبر قدر ممكن من الاجتماعات للأسبوع المقبل دون أن تحصل أية تعارضات، عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا حضر الشخص } i \text{ أحد الاجتماعات} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ويكون النموذج الرياضي هو:

كبر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

مثال (٤,٦) مسألة التدفق الأكبر

لنأخذ الشبكة الموجهة في الشكل رقم (٤,٧) ولنفرض أن هذه الشبكة تمثل شبكة من أنابيب تبدأ من النقطة s (المنبع) وتنهي في النقطة t (المصب) ولنفرض كذلك أن كل ضلع موجهة (قوس) من هذه الشبكة يمثل قطعة من أنبوب يجري فيه الغازولين بمعدل d_j بالاتجاه المشار إليه في الشكل فتكون مسألة التدفق الأكبر عندئذ إيجاد مسار من الشبكة بالاتجاه من s إلى t يكون فيه التدفق من s إلى t أكبر ما يمكن.

الحل

لنعرف المسار من s إلى t بمجموعة العقد التالية:

$$s, i_1, i_2, \cdots, i_r, t$$

بحيث نصل بين أي عقدتين متتاليتين بقوس موجهة. عندئذ يمكن التعبير عن كافة المسارات الموجهة من s إلى t بالمصفوفة A التالية المعرفة عناصرها a_{ij} بما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الضلع الموجه } j \text{ ضمن المسار } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وبذلك تكون المصفوفة A كما يلي:

$$A = \begin{array}{c|ccccc|} & \text{مسار 1} & \text{مسار 2} & \text{مسار 3} & \text{مسار 4} & \text{مسار 5} \\ (s,1) & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (s,2) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (s,3) & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (1,2) & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (3,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ (1,t) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (2,t) & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ (3,t) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

لاحظ أن عدد أسطر المصفوفة A هو ٨ أسطر كل منها يتعلق بأحد أقواس الشبكة الموضحة بالشكل رقم (٤,٧). ولو أخذنا ترتيب الأسطر كما وردت سابقاً فإن هذه الأسطر تتعلق بالأقواس

$(s,1)$ ، $(s,2)$ ، $(s,3)$ ، $(1,2)$ ، $(3,2)$ ، $(1,t)$ ، $(2,t)$ ، $(3,t)$

على الترتيب . فلو أخذنا المسار 1 مثلا لوجدنا حسب تعريف a_{ij} وحسب المصفوفة A أن هذا المسار هو $(s,1) \rightarrow (1,t)$ ، وهكذا. لنعرف الآن المتغيرات x_i كما يلي :

مقدار التدفق في المسار i هو x_i (متغيرات القرار) .عندئذ يكون النموذج الرياضي لمسألة التدفق الأكبر (بصفة المصفوفات) في الشبكة (٤,٧) هو

كبر الدالة :

$$Z = \sum_{i=1}^{5} x_i$$

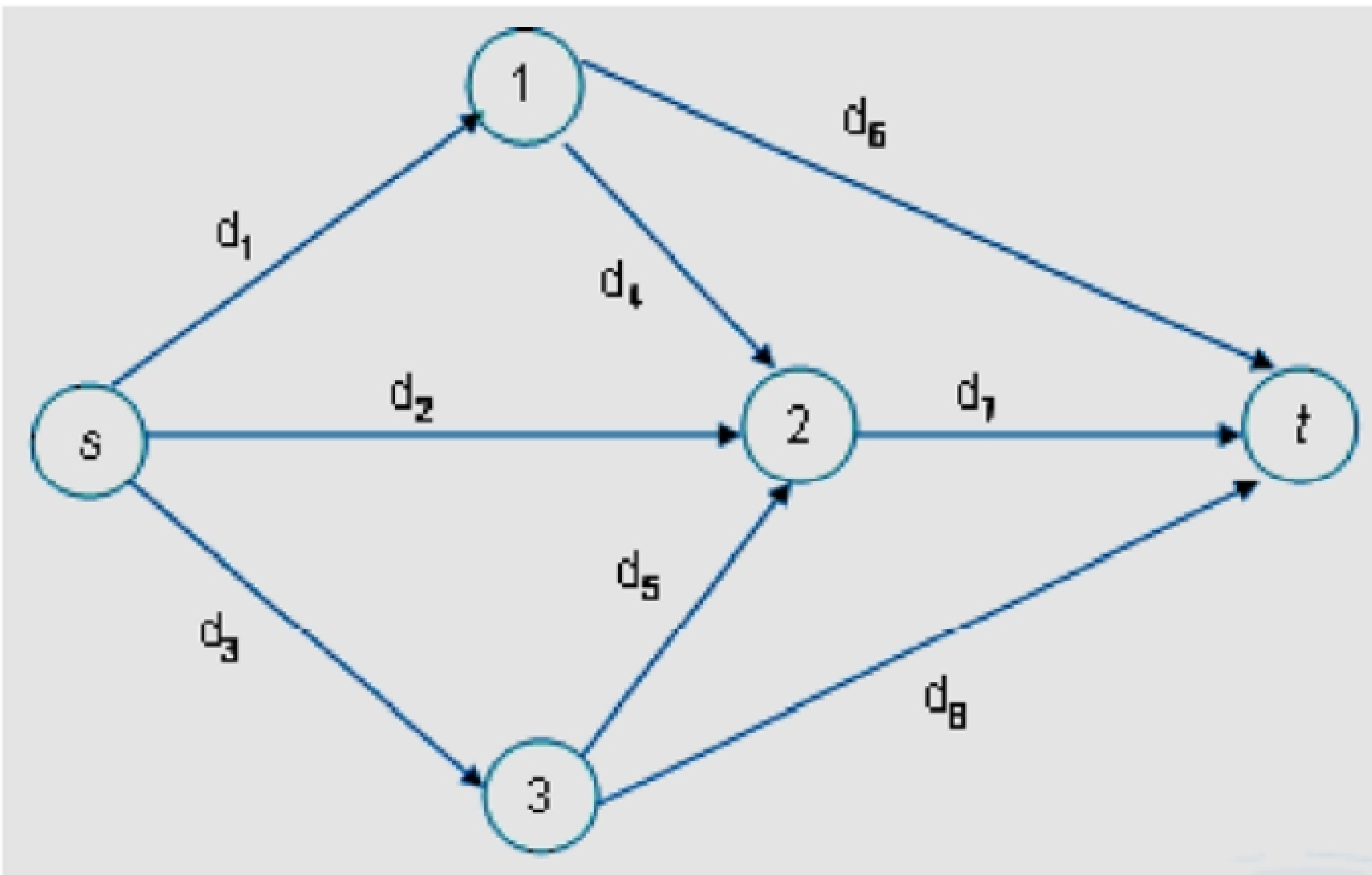
وفقا للقيود :

$$Ax \leq d$$

$x_j \geq 0$ أعداد صحيحة

حيث $d = (d_1, d_2, \cdots, d_8)$

وتعتبر هذه المسألة تعميما لمسألة الحزم من اتجاهين . الأول أن متغيرات القرار x_i يمكن أن تأخذ أي قيمة صحيحة غير سالبة بدلا من القيمتين 0 و1 . والثانية أن الأطراف اليمنى للقيود يمكن أن تكون أي عدد صحيح غير سالب بدلا من الواحد.



الشكل رقم (٤,٧).

(٤,٦,٢) مسائل التغطية Set Covering Problems

في مسائل التغطية تنص القيود على أن كل عنصر من A تجب تغطيته بواحدة على الأقل من المجموعات الجزئية B_i . وفي هذه الحالة تكون القيود من الشكل " أكبر من أو تساوي " . والهدف في كل من مسائل التغطية هو جعل التكلفة الكلية الناتجة من

تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أقل ما يمكن. ولو عرفنا المتغيرات x_i والمقادير a_{ij} كما في مسائل الحزم لكان النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغّر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وبلغة المصفوفات فإن هذا النموذج هو:

صغّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax \geq e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

حيث $e = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ و $e_i = 1$ في الموقع الـ i و $e_i = 0$ عدا ذلك.

والمثالين التاليين يوضحان بعض تطبيقات مسائل التغطية

مثال (٤,٧) مسألة غطاء العقد Node Covering Problem

نعرف الغطاء في شبكة بأنه مجموعة جزئية من الأقواس (الأضلاع الموجهة) بحيث أن كل عقدة من الشبكة هي نهاية لواحدة على الأقل من الأقواس من هذه المجموعة الجزئية. والهدف في هذا النوع من المسائل هو إيجاد غطاء بأقل قدر ممكن من الأقواس. فلو عرفنا المتغير x_j بأنه يمثل القوس j في الشبكة عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام القوس } j \text{ في التغطية} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

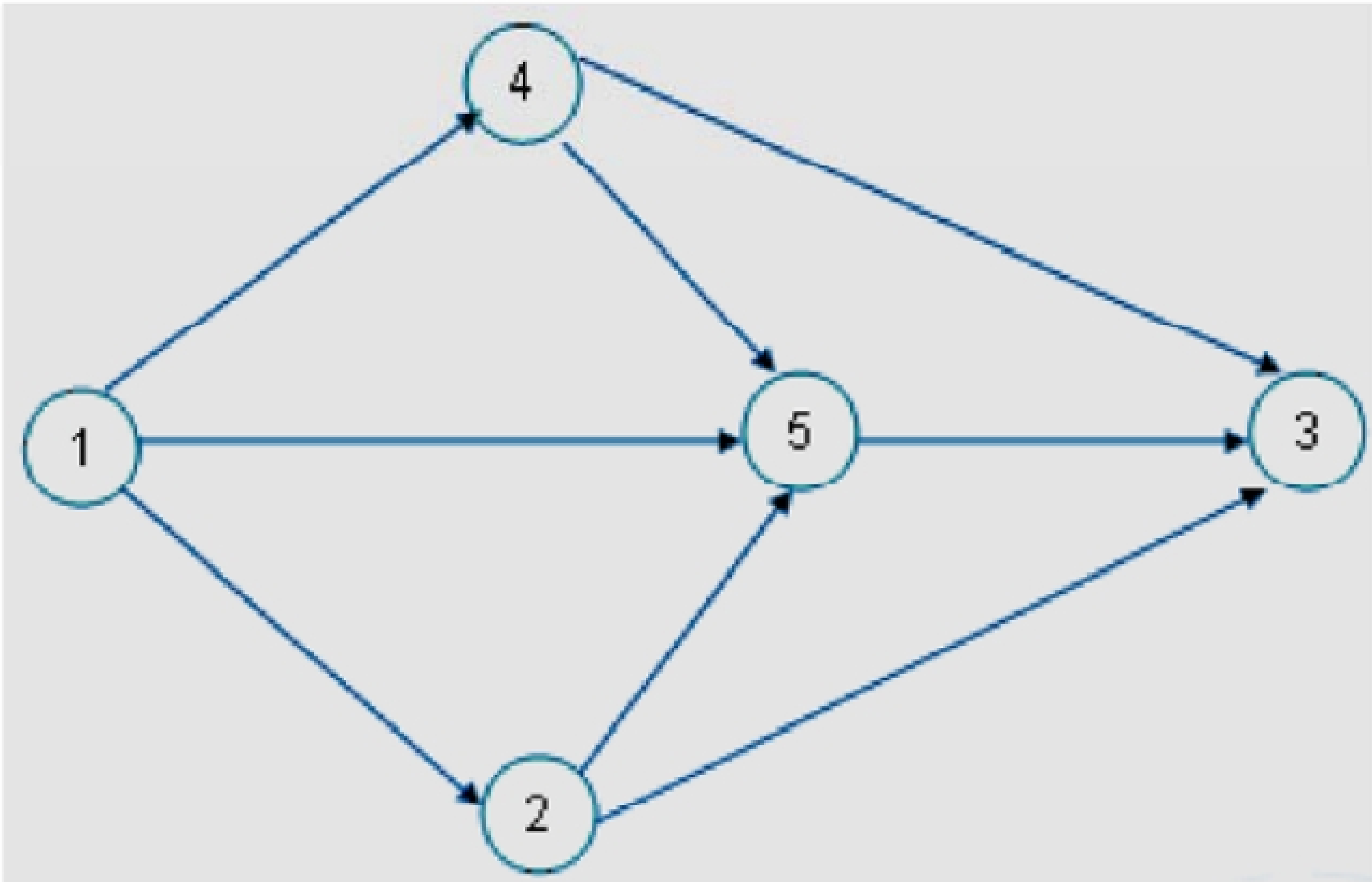
ولكي نتأكد من أن العقدة i من الشبكة هي نهاية لقوس واحدة على الأقل في الغطاء يجب أن يكون $x_j = 1$ حيث تكون العقدة i هي أحد النهايات في القوس j . لنعرف المصفوفة $A = (a_{ij})$ كما يلي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كانت العقدة } i \text{ في الشبكة هي عقدة نهاية للقوس } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

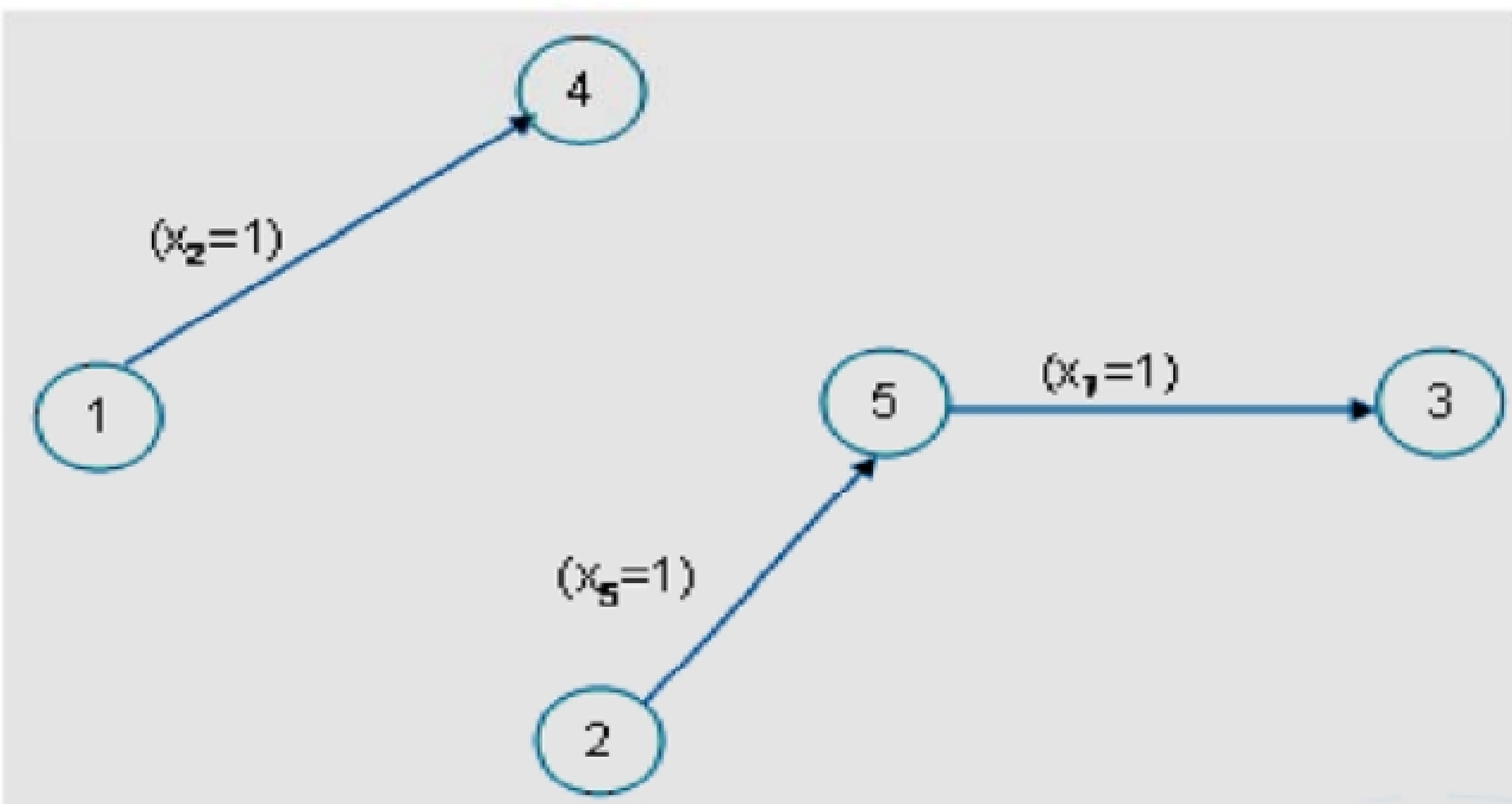
عندئذ تكون جميع التكاليف في مسألة إيجاد غطاء بأقل قدر ممكن من الأقواس مساوية للواحد. وللتوضيح لنأخذ الشبكة الممثلة بالشكل رقم (٤,٨) والتي تحوي 5 عقد و8 أقواس، فبذلك يكون متجه التكلفة هو $c^T = (1,1,1,1,1,1,1,1)$ وتكون المصفوفة A المقابلة لهذه الشبكة هي:

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} (1,2) & (1,4) & (1,5) & (2,3) & (2,5) & (3,4) & (3,5) & (4,5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

وحـل هـذه المـسألة (حـل يغطـي كافـة العقـد بأقـل قـدر ممكـن مـن الأقـواس) هـو $x_2^* = x_5^* = x_1^* = 1$ وهذا الحل ممثل كما في الشكل رقم (٤,٩).



الشكل رقم (٤,٨).



الشكل رقم (٤,٩).

مثال (٤,٨)

تعتزم شركة كهربائيات صناعة 6 أنواع جديدة من قطع الترانزستورات، وبعد دراسة مستفيضة من مهندسي الشركة تم اختيار 14 جهازا مختلفا يمكن أن تقوم بصناعة قطع الترانزستورات المطلوبة وبتكاليف تعتمد على الجهاز المصنع والقطعة المصنَّعة في هذا الجهاز. لنفرض أن المقادير a_{ij} كما هي معرفة أعلاه أي:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام الجهاز } i \text{ في تصنيع الترانزستور } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وأن هذه المصفوفة A معطاة كما يلي:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
3	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0

فمثلا $A_{14} = (1,0,0,1,1,0)$ يعني أن الجهاز $j = 14$ يمكن أن يصنع الترانزستورات ذات الأرقام 1، 4، 5 لكنه لا يصنع الترانزستورات ذات الأرقام 2، 3، 6. وأن التكلفة المقابلة لاستخدام الجهاز j معطاة كما يلي:

$$c = (12,17,13,10,13,17,24,24,60,38,27,45,25,35)^T$$

عندئذ تكون متغيرات القرار هي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار الجهاز } j \text{ للتصنيع} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وعندئذ يكون النموذج الرياضي بلغة المصفوفات لمسألة اختيار الأجهزة لتغطية صناعة الـ 6 ترانزستورات كما يلي:

صغِّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax \geq e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad , \quad j = 1, \cdots, n$$

حيث e هو المتجه الذي عرّفناه من قبل.

وتضمن لنا قيود المسألة أن واحد على الأقل من الأجهزة سيؤدي مهمة التصنيع. ووفقا للبيانات العددية للمثال فإن الحل الأمثل هو $x_5^* = x_7^* = x_3^* = 1$ وقيمته $Z = 62$.

(٤,٦,٣) مسائل التجزئة Set Partitioning Problems

في مسائل التجزئة فإنه يتم تجزئة أو توزيع عناصر A على عناصر المجموعات الجزئية B_i بحيث يظهر كل عنصر من A مرة واحدة بالضبط في أحد المجموعات الجزئية B_i. وفي هذه الحالة فإن جميع القيود تكون على "شكل مساواة". أما الهدف في هذه المسائل فهو جعل التكلفة الكلية الناتجة من تخصيص المجموعات B_i لعناصر من A أقل ما يمكن. فإذا حافظنا على الرموز التي استخدمت في مسائل التغطية أعلاه فإن النموذج الرياضي العام لهذه المسائل يكون كما يلي:

صغِّر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وبلغة المصفوفات فإن هذا النموذج هو:

صغِّر الدالة:

$$Z = cx$$

وفقا للقيود:

$$Ax = e$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

وكتطبيق مباشر على هذا النوع من المسائل هو أن نضيف قيدا في المثال (٤،٨) الأخير أن كل منتج يجب أن يقوم به جهاز واحد فقط من الأجهزة التي يتم اختيارها عندئذ تصبح القيود في المثال على شكل مساواة ويصبح المثال الناتج هو مثال على مسائل التجزئة . فلو استخدمنا بيانات المثال (٤،٨) نفسها لكان الحل الأمثل عندئذ هو $x_1^* = x_3^* = x_5^* = x_{13}^* = 1$ وقيمته $Z = 63$.

ولمزيد من الإيضاح نسوق المثال التالي:

مثال (٤،٩)

لنفرض أن لدينا J من برامج الكمبيوتر نرغب بنسخها على K من الدسكات وأن سعة كل دسك هي b وأن قيمة البرنامج j $(j = 1, 2, \cdots, J)$ هي c_j وأن

حجمه هو a_j وأن الهدف هو نسخ البرامج على أقل قدر ممكن من الدسكات.

لصياغة هذه المسألة نعرف المتغيرات التالية:

$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام الدسك } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم نسخ البرنامج } j \text{ على الدسك } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{k=1}^{K} y_k$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} = 1, \quad j = 1, \cdots, J$$

$$\sum_{j=1}^{J} a_j x_{jk} \le b_{yk}, \quad k = 1, \cdots, K$$

$$x_{jk}, y_k = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, J; \; k = 1, \cdots, K$$

(٤,٧) مسألة أقصر مسار في شبكة موجهة

The Shortest Path Problem in a Directed Graph

نعالج في هذه الفقرة المسألة التالية:

لدينا شبكة موجهة ونرغب بإيجاد أقصر مسار (يقصد بأقصر مسار بأنه ذلك المسار الذي تكون مجموع أطوال أقواسه أقل ما يمكن) من عقدة ما من هذا المسار، مثلا

العقدة 1 ، إلى جميع عقد هذه الشبكة. من الواضح أننا قد نستخدم أي قوس (ضلع موجهة) من أقواس الشبكة بأكثر من مسار (أكثر من مرة)، ولذا فإننا نعرف المتغيرات x_{ij} بما يلي:

$$x_{ij} = (i, j) \text{ عدد مرات التي تستخدم القوس }$$

كما نعرف المقادير: $c_{ij} = (i, j)$ طول القوس

وعندها يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة كما يلي

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j} = n-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = -1, \quad i = 2, \cdots, n$$

$$x_{ijk} \geq 0, \quad i \neq j = 1, \cdots, n$$

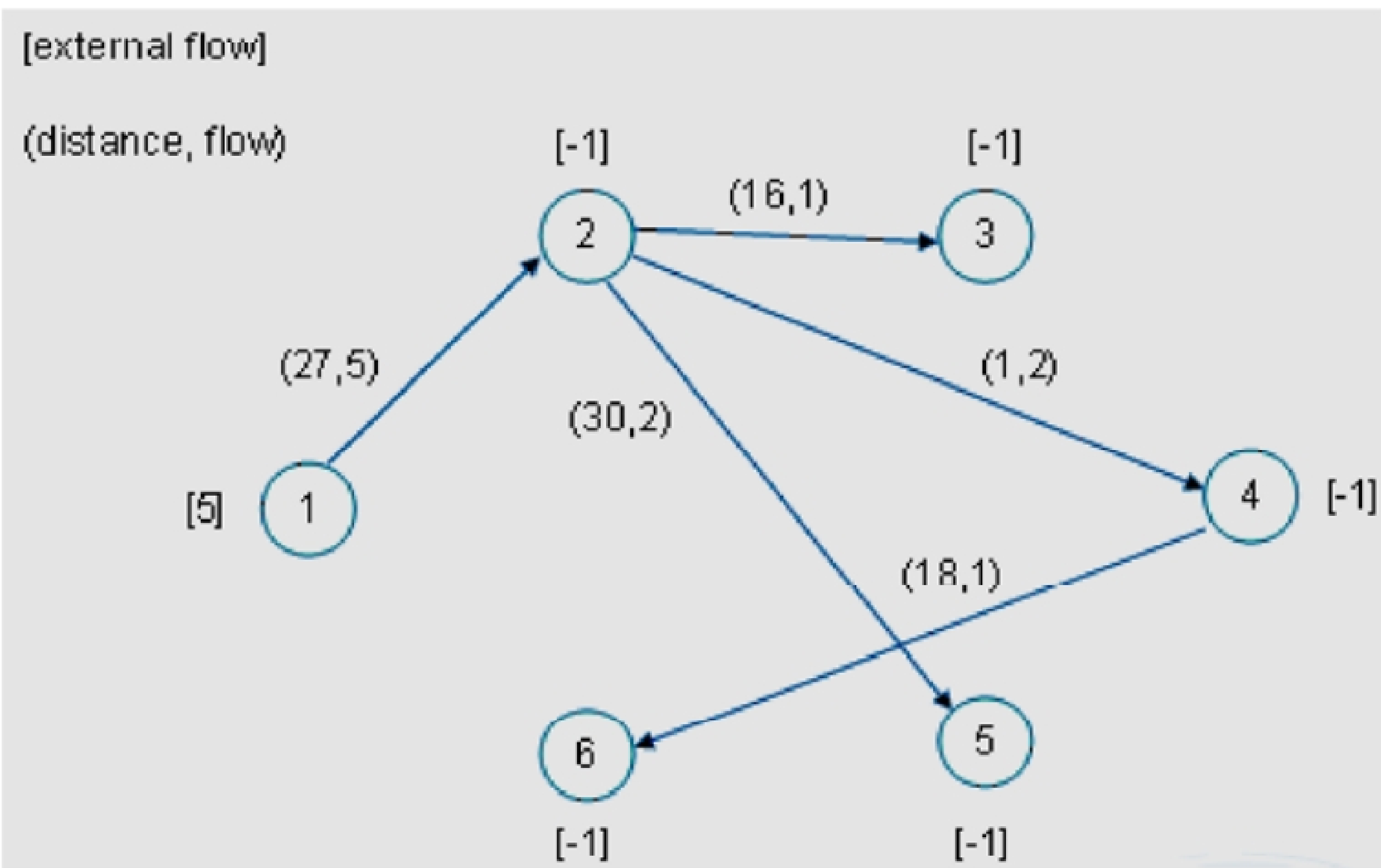
وتضمن لنا المجموعة الأولى من القيود أن $n-1$ من المسارات لابد أن تبدأ من عقدة البداية (وهي هنا العقدة1). أما المجموعة الثانية من القيود فتضمن لنا الحالة الطبيعية للتدفق وهي في أي عقدة عدا عقدة البداية فإن مجموع التدفق الداخل (عدد الأقواس الداخلة) لهذه العقدة يزيد بواحد عن مجموع التدفق الخارج منها (عدد الأقواس الخارجة).

وسنوضح هذه المسألة بالمثال التالي :

مثال (٤,١٠)

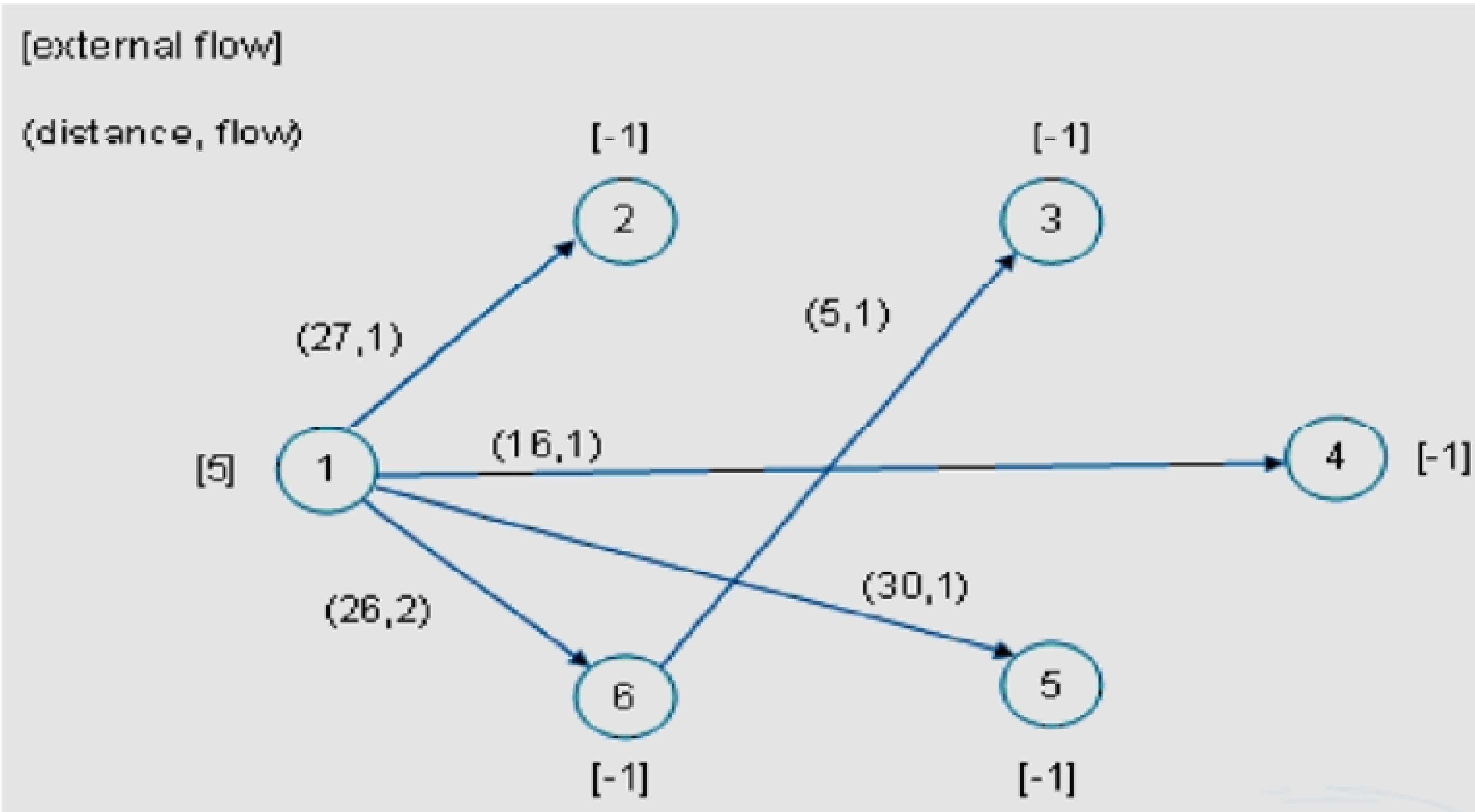
بالعودة إلى مثال (٤,٢) المتعلق بشبكة مكونة من ست مدن. يعطي الشكل رقم (٤,١٠) أدناه حلا ممكنا لمسألة أقصر مسار في هذه الشبكة ، حيث يدل الرقم في القوس المتوسطة عند العقد على أن 5 وحدات من التدفق تدخل العقدة 1 بينما تخرج وحدة تدفق واحدة من باقي العقد.

وعلى ضوء معلومات الشكل رقم (٤,١٠) فإن أطوال المسارات من العقدة 1 إلى العقد 2، 3، 4، 5، 6 هو $P_6 = 46$ ، $P_5 = 57$ ، $P_4 = 28$ ، $P_3 = 43$ ، $P_2 = 27$ ، على الترتيب ومجموع أطوالها هو $Z = 231$. أيضا فإن الأرقام التي تظهر على الأقواس تدل على عدد مرات استخدام كل من هذه الأقواس في الحل(التدفق عبر هذه القوس).



الشكل رقم (٤,١٠).

وبتطبيق النموذج الرياضي أعلاه على هذه البيانات نجد أن الحل الأمثل لمسألة أقصر مسار موجه (كما عرفناها سابقاً) معطى كما في الشكل رقم (٤,١١).



الشكل رقم (٤,١١).

وهــذا الحــل هــو $P_2 = 27$ ، $P_3 = 31$ ، $P_4 = 16$ ، $P_5 = 30$ ، $P_6 = 26$ وقيمتــه $Z = 130$. والحل الأمثل هذا يعطي أقصر مسار من العقدة البداية 1 إلى جميع عقد الشبكة.

(٤,٨) مسألة تلوين الرؤوس في رسم غير موجه
Vertex Coloring Problem

يتلخص هذا النوع من المسائل بما يلي :

لدينا رسم غير موجه $G = (V, E)$ حيث ترمز V لمجموعة رؤوس هذا الرسم وترمز E لمجموعة أضلاعه، والهدف هنا إيجاد أقل قدر ممكن من الألوان التي سنحتاجها لتلوين رؤوس هذا الرسم بحيث أن أي عقدتين متجاورتين تحملان لونين

مختلفين. نسمي العدد الأصغر من الألوان اللازمة باسم رقم التلوين (Chromatic Number). فلو كانت x هي قيمة هذا العدد بالنسبة للرسم G فإننا نرمز له بالرمز $G(x)$. ومن الواضح أنه يمكن لنا دوما أن نقوم بتلوين رؤوس أي رسم بعدد من الألوان لا يتجاوز $|V|$. ولإيجاد النموذج الرياضي لهذه المسألة نعرف المتغيرات التالية (متغيرات القرار):

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام اللون } i \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم استخدام اللون } i \text{ لتلوين الرأس } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

ولنعرف المقادير a_{kl} بما يلي:

$$a_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القوس } (k,l) \text{ ينتمي إلى } E \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

عندئذ يكون النموذج الرياضي لهذه المسألة على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} z_i$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \le z_i, \quad \forall i, j$$

$$x_{is} + x_{it} \le 2 - a_{st}$$

$$x_{ij}\,, z_i = 1 \text{ أو } 0$$

ومجموعة القيود الثانية هي قيود بديهية حسب تعريف كل من x_{ij} و z_i. وتدل مجموعة القيود الثالثة على أنه إذا كان الضلع (s,t) هو أحد أضلاع الرسم G (والذي يعني أن الرأسين t و s متجاورين وأن $a_{st} = 1$) فإن عدد الألوان المستخدمة في تلوين الرأسين t و s لا يتجاوز 1. أما إذا كان الضلع (s,t) ليس أحد أضلاع الرسم G (والذي يعني أن الرأسين t و s غير متجاورين وأن $a_{st} = 0$) فإن عدد الألوان المستخدمة في تلوين الرأسين t و s لا يتجاوز 2، الأمر الذي يضمن لنا اختلاف ألوان الرؤوس المتجاورة.

(٤,٩) مسألة تصميم نظام توزيع سلع متعددة
Multi-commodity Distribution System Design Problem

تقوم هذه المسألة على المعلومات التالية. لدينا n من المعامل (أو مراكز الإنتاج) هي $j = 1,2,\cdots,n$ ، تقوم بإنتاج q من السلع المختلفة هي $i = 1,2,\cdots,q$ ، بحيث أن المعمل j يقوم بإنتاج s_{ij} وحدة من السلعة i . ولدينا كذلك عدد m من الزبائن $l = 1,2,\cdots,m$ الذين يطلبون هذه السلع بحيث أن الطلب على السلعة i من قبل الزبون l هو D_{il}.

يتم توزيع هذه السلع على الزبائن خلال p من مراكز التوزيع $k = 1,2,\cdots,p$. يعطي الشكل رقم (٤,١٢) تمثيلا ممكنا لهذا النوع من المسائل. ومعلوم لدينا أيضا ما يلي :

أقل وأكبر قدر ممكن من البضاعة التي يسمح بتوزيعها سنويا من خلال المركز k : L_k, U_k

التكلفة السنوية (الثابتة) لتشغيل المركز k : f_k

تكلفة توزيع وحدة من السلعة من خلال المركز k : v_k

تكلفة إنتاج وحدة من السلعة i في المعمل j وتوزيعها للزبون l من خلال المركز k : c_{ijkl}

يكمن الهدف في هذه المسألة في اختيار مراكز التوزيع التي يتم من خلالها توزيع السلع على الزبائن بحيث يتم سد احتياجاتهم دون تجاوز الطاقة الإنتاجية للمعامل وبحيث تكون التكلفة الكلية الناتجة لمجمل العملية أقل ما يمكن.

وفقا للفرضيات أعلاه فإن متغيرات القرار لهذه المسألة ستكون كما يلي:

مقدار السلعة i من المعمل j و التي تصل للزبون l من خلال المركز k : x_{ijkl}

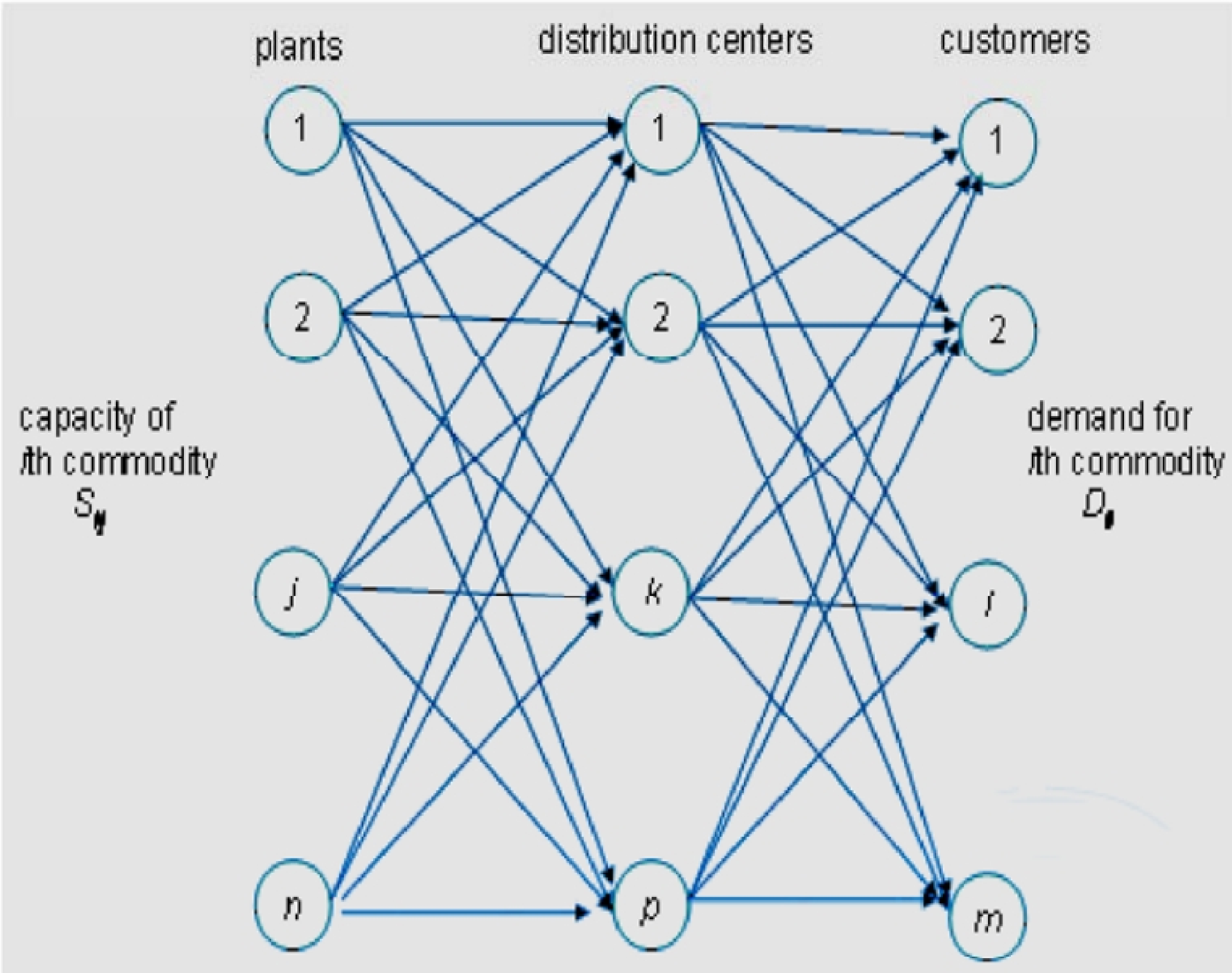
$$y_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{إذا قام المركز } k \text{ بتقديم خدمة للزبون } l \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم افتتاح مركز توزيع في الموقع } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والنموذج الرياضي لها هو:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{m} c_{ijkl}x_{ijkl} + \sum_{k=1}^{p} f_k z_k + \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\sum_{l=1}^{m} v_k D_{il} y_{kl}$$



الشكل رقم (٤,١٢).

وفقا للقيود:

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{m} x_{ijkl} \le S_{ij} \qquad \text{لجميع قيم } i, j$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijkl} = D_{il}\, y_{kl} \qquad \text{لجميع قيم } i,k,l$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{kl} = 1 \qquad l = 1,2,\cdots,m$$

$$L_k z_k \le \sum_{i=1}^{q}\sum_{l=1}^{m} D_{il} y_{kl} \le U_k z_k \quad k=1,2,\cdots,p$$

$$x_{ijkl} \ge 0 \qquad \text{لجميع قيم } i,j,k,l$$

$$y_{kl} = 1 \text{ أو } 0 \qquad \text{لجميع قيم } k,l$$

$$z_k = 1 \text{ أو } 0 \qquad k=1,2,\cdots,p$$

لاحظ أن النموذج الأخير هو نموذج لمسألة برمجة خطية عددية مختلطة. فدالة الهدف الخطية تتكون من مجموع تكاليف توزيع السلع وتكاليف تشغيل المراكز. وتضمن لنا المجموعة الأولى من القيود أنه لن يتم تجاوز الطاقة الإنتاجية لأي معمل ومن كل سلعة. وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود تلبية حاجات الزبائن من السلع المختلفة وتضمن لنا كذلك أن $x_{ijkl} = 0$ عندما $y_{kl} = 0$ والتي تعني أنه لن تتم عملية خدمة الزبون l من المركز k . أما المجموعة الثالثة من القيود فتضمن لنا أن كل زبون ستتم خدمته من واحد فقط من المراكز. وأخيرا فإن المجموعة الرابعة من القيود تضمن أن ما سيتم توزيعه من السلع من خلال المركز k سيتراوح بين الحدين الأدنى L_k والأعلى U_k الذين عرفناهما سابقاً. وتضمن لنا هذه القيود أيضا العلاقة المنطقية بين المتغيرات y و z حيث أن $z_k = 1$ إذا وفقط إذا كان $y_{kl} = 1$ لبعض قيم l.

(٤,١٠) مسألة جدولة تنفيذ أعمال على مكائن للتصنيع

Scheduling Jobs on Machines Problem

يتناول هذا النوع من المسائل جدولة n من الأعمال $i=1,2,\cdots,n$ على m ماكينة $j=1,2,\cdots,m$. كأن نقوم بتصنيع عدد من قطع الغيار على عدد من المكائن.

وللتبسيط نفترض أن كلاً من هذه الأعمال يحتاج إلى عملية واحدة فقط على إحدى المكائن وأنه لابد للعمليات الخاصة بكل عمل من تسلسل خاص في ترتيب تنفيذها. وبهذا الخصوص فإننا نعرف المتغيرات التالية:

$$r_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا أجريت العملية } j \text{ للعمل } i \text{ على الماكينة } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

كذلك فإننا نعرف p_{ik} بأنه وقت تنفيذ العمل i على الماكينة k . عندها تكون متغيرات القرار هي وقت بداية تنفيذ العمل i على الماكينة k : x_{ik}

لنعرف المتغيرات:

$$\delta_{rsk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا سبق العمل } r \text{ العمل } s \text{ في التنفيذ على الماكينة } k \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

أما الهدف في هذا النوع من المسائل فهو عادة ما يكون جعل مجموع بدايات تنفيذ أخر عملية لكل من الأعمال أقل ما يمكن. وعندها يكون النموذج الرياضي للمسألة كما يلي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{m} r_{imk} x_{ik}$$

وفقا للقيود:

$$x_{rk} - x_{sk} \geq p_{sk} - \delta_{rsr_1} M \quad \text{لجميع الأزواج } (r,s) \text{ على الماكينة } k$$

$$x_{sk} - x_{rk} \geq p_{rk} - (1 - \delta_{rsk}) M \quad \text{لجميع الأزواج } (r,s) \text{ على الماكينة } k$$

$$j = 1, 2, \cdots, m-1$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_{ijk} (x_{ik} + p_{ik}) \le \sum_{k=1}^{m} r_{i,j+1,k} x_{ik}$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{kl} = 1 \qquad l = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_{ik} \ge 0 \qquad \text{لجميع قيم } i,k$$

$$\delta_{rsk} = 1 \text{ أو } 0 \qquad \text{لجميع قيم } r,s,k$$

حيث M مقدار كبير بشكل كاف.

(٤,١١) تمارين (٤)

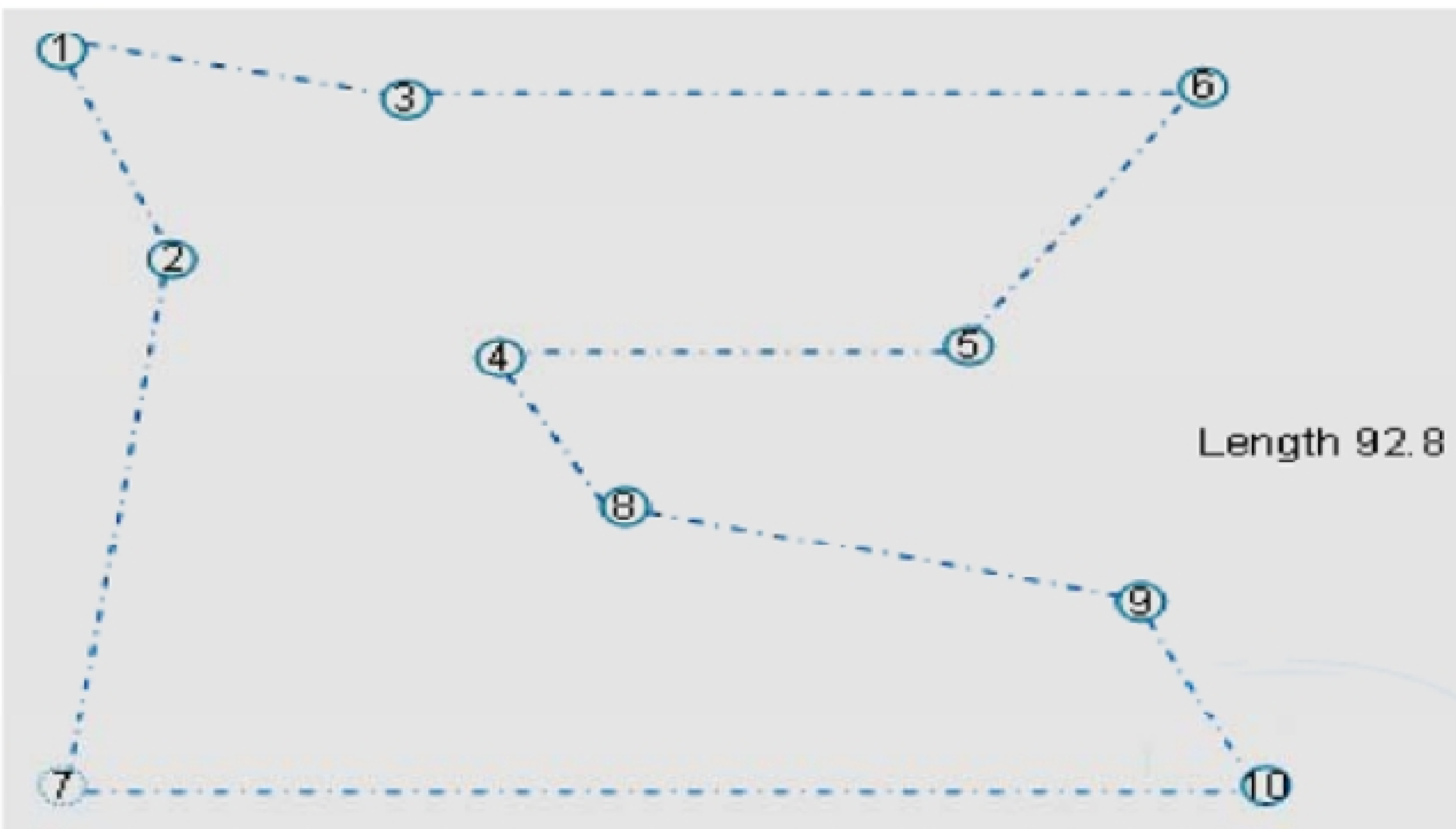
١- قام أحد المهندسين الصناعيين بتقسيم الدور الخاص بمعرض لمجموعة من المكائن الصناعية إلى شبكة متصالبة مكونة من 12 مربع رمز لها بالرمز g ، بحيث أن كل منها سيخصص كموقع لأحد المكائن m. وقد قام بتقدير المسافات بين أزواج المربعات الناتجة ورمز لها بـ $d_{gg'}$ بين g و g'. وكذلك قام بتقدير عدد الأزواج من المسافات $d_{gg'}$ بين المكائن ورمز بـ $d_{mm'}$ للمسافة بين الماكينتين m و m' في الاتجاهين خلال أسبوع من العمليات. المطلوب صياغة هذه المسألة كمسألة تخصيص تربيعية هدفها جعل تكاليف تدفق الإنتاج بين المكائن والمسافة المقطوعة بين مواقعها اقل ما يمكن مفترضا أن $d_{gg'} = d_{g'g}$.

٢- ينوي أحد المعيدين القائمين بالإشراف على أحد المشروعات في بحوث العمليات بتقسيم فصله الدراسي إلى فرق عمل يتألف كل منها من طالبين s و s' وذلك بغرض رفع أداء الطلبة في ذلك المشروع. وقد قام كل طالب s بتسجيل أفضلياته مع طالب أخر s' ورمز المعيد لهذه الأفضلية بالرمز $p_{ss'}$. المطلوب صياغة هذه المسألة كمسألة توافق بحيث يكون الإختيار الكلي للأفضليات أكبر ما يمكن.

٣– أعد صياغة مسألة البائع المتجول باستخدام متغيرات القرار البديلة التالية:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان القوس } (i,j) \text{ يأتي في المرتبة } k \text{ من الجولة} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

٤– من التطبيقات المباشرة لمسألة البائع المتجول هو تثقيب اللوحات الإلكترونية التي تدخل في صناعات بعض الأجهزة بأقل زمن ممكن. ويوضح الشكل رقم (٤,١٣) مثالا على لوحة مكونة من 10 أماكن يلزم تثقيبها بثقوب ذات أحجام مختلفة أو متساوية. من الواضح أن المسافات بين الثقوب تلعب دورا أساسيا في الزمن اللازم لتثقيب مثل هذه اللوحة. إن عملية المرور على كافة الثقوب تشبه إلى حد كبير مسألة مرور البائع المتجول على عدد من المدن. فمثلا الجولة الموضحة في الشكل رقم (٤,١٣) هي جولة طولها $Z = 92.5$ إنش. الجدول التالي يعطي المسافات بالإنش بين ثقوب لوحة الشكل (٤,١٣) والهدف هو تثقيب اللوحة بأقل زمن (مسافة) ممكن (ممكنة). المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي كمسألة بائع متجول.



الشكل رقم (٤,١٣).

الجدول رقم (٤,٣). المسافات بين الثقوب في الشكل رقم (٤,١٣).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	–	3.6	5.1	10.0	15.3	20.0	16.0	14.2	23.0	26.4
2	3.6	–	3.6	6.4	12.1	18.1	13.2	10.6	19.7	23.0
3	5.1	3.6	–	7.1	10.6	15.0	15.8	10.8	18.4	21.9
4	10.0	6.4	7.1	–	7.0	15.7	10.0	4.2	13.9	17.0
5	15.3	12.1	10.6	7.0	–	9.9	15.3	5.0	7.8	11.3
6	20.0	18.1	15.0	15.7	9.9	–	25.0	14.9	12.0	15.0
7		13.2	15.8	10.0	15.3	25.0	–	10.3	19.2	21.0
8	14.2	10.6	10.8	4.2	5.0	14.9	10.2	–	10.2	13.0
9	23.0	19.8	18.4	13.9	7.8	12.0	19.2	10.2	–	3.6
10	26.4	23.0	21.9	17.0	11.3	15.0	21.0	13.0	3.6	–

٥- يمتلك رجل أعمال يعيش في جدة شركة تأمين لها خمس فروع تقع في جدة، الرياض، الدمام، أبها، مكة المكرمة. يقوم هذا الرجل بزيارة كافة الفروع في شهر ديسمبر من نهاية كل عام. إذا علمت أن المسافات بالكيلومتر بين هذه المدن معطاة كما في الجدول رقم (٤,٤).

الجدول رقم (٤,٤)

أبها	الدمام	الرياض	مكة	جدة	المدن
625	1343	949	79	0	جدة
627	1265	870	0	79	مكة
1046	395	0	870	949	الرياض
1495	0	395	1265	1343	الدمام
0	1495	1064	627	625	ابها

المطلوب إيجاد الصيغة الرياضية التي تجعل المسافة الكلية التي يقطعها رجل الأعمال لدى زيارته كافة فروع الشركة ابتداءً من جدة والعودة إليها أقل ما يمكن

٦– تعتزم شركة أمريكية للطيران الداخلي على تصميم مراكز للرحلات الداخلية ضمن الولايات المتحدة الأمريكية ضمن مسافة ال 1000 ميل. ولذلك فقد وقع اختيارها على مجموعة من المدن الرئيسة والتي تحقق هذا الشرط والبيانات معطاة في الجدول رقم (٤,٥). ترغب إدارة الشركة بتحديد العدد الأدنى من مراكز الرحلات الداخلية والتي يمكنها تغطية كافة المدن الرئيسة المذكورة في الجدول السابق (تكون المدينة مغطاة إذا شملت بواحد على الأقل من المراكز). المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي.

الجدول رقم (٤,٥).

المدن الرئيسة	المدن التي تقع ضمن مسافة ال 1000 ميل
أتلانتا (AT)	AT,CH,HO,NO,NY,PT
بوستون(BO)	BO,NY,PI
شيكاغو(CH)	AT,CH,NY,NO,PI
دينفر(DE)	DE,SL
هوستون(HO)	AT,HO,NO
لوس أنجلوس(LA)	LA,SL,SF
نيو اورليانز(NO)	AT,CH,HO,NO
نيويورك(NY)	AT.BO,CH,NY,PI
بتسبرغ(PI)	AT,BO,CH,NY,PI
سالت ليك سيتي(SL)	DE,LA,SL,SF,SE
سان فرانسيسكو(SF)	LA,SL,SF,SE
سياتل(SE)	SL,SF,SE

٧- تتعامل شركة لإطفاء الحرائق حاليا مع 7 شركات لسلالم الإطفاء ومع سبع شركات لأجهزة الإنذار. يعطي الجدول رقم (٤,٦) أقرب موقع لشركتين من شركات الإنذار لموقع جهاز الإنذار نفسه. يرغب مجلس أمناء المدينة بجعل عدد شركات سلالم الإطفاء المناسبة التي يمكن استبدالها بأبراج إطفاء أكبر ما يمكن. ولكن ثمة عوائق سياسية تدخل في الموضوع هو أنه لا يمكن اعتبار شركة سلالم إطفاء مناسبة لعملية استبدال ما لم تكن واحدة على الأقل من الشركتين القريبتين من كل جهاز إنذار هي أيضا شركة مناسبة لمثل هذا الاستبدال. المطلوب صياغة المسألة التي من شأنها أن تجعل عدد الشركات المناسبة للاستبدال أكبر ما يمكن.

الجدول رقم (٤,٦).

رقم جهاز الإنذار	رقم أقرب شركتين من شركات أجهزة الإنذار
1	2.3
2	3.4
3	1.5
4	2.6
5	3.6
6	4.7
7	5.7

٨- يحوي مستشفى الملك خالد الجامعي على 6 جراحين يستطيع كل منهم أن يقوم ببعض من ستة من العمليات الجراحية كما هو مشار في الجدول رقم (٤,٧) حيث تشير * إلى إمكانية قيام الجراح المقابل بالعملية بنجاح .بافتراض أن الجراحين 1 و2 لا يرغبان بالعمل معا ، فالمطلوب صياغة المسألة التي تحدد أقل قدر ممكن من الجراحين الذين يمكنهم إجراء كافة العمليات الستة في هذا المستشفى.

الجدول رقم (٤,٧).

الجراح	رقم العملية الجراحية					
	1	2	3	4	5	6
1	*	*		*		
2			*		*	*
3			*		*	
4	*					
5		*				
6				*	*	

٩- ترغب إحدى الجامعات باقتناء حزم جاهزة لحل بعض مسائل البرمجة الرياضية والتي تشمل على البرمجة الخطية، البرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية وذلك لخدمة طلاب وهيئة التدريس ببعض الأقسام ذات الصلة بهذه البرامج وذلك من 4 حزم متوافرة حاليا. البيانات معطاة في الجدول رقم (٤,٨) حيث يعني الرمز * أن الحزمة قادرة عل حل نمط المسألة المقابل .

الجدول رقم (٤,٨).

نمط المسائل التي يمكن لحزمة البرنامج حلها	رقم حزمة البرنامج وإمكانياته للحل			
	1	2	3	4
البرمجة الخطية (LP)	*	*	*	*
البرمجة العددية (IP)		*		*
البرمجة غير الخطية(NLP)			*	*

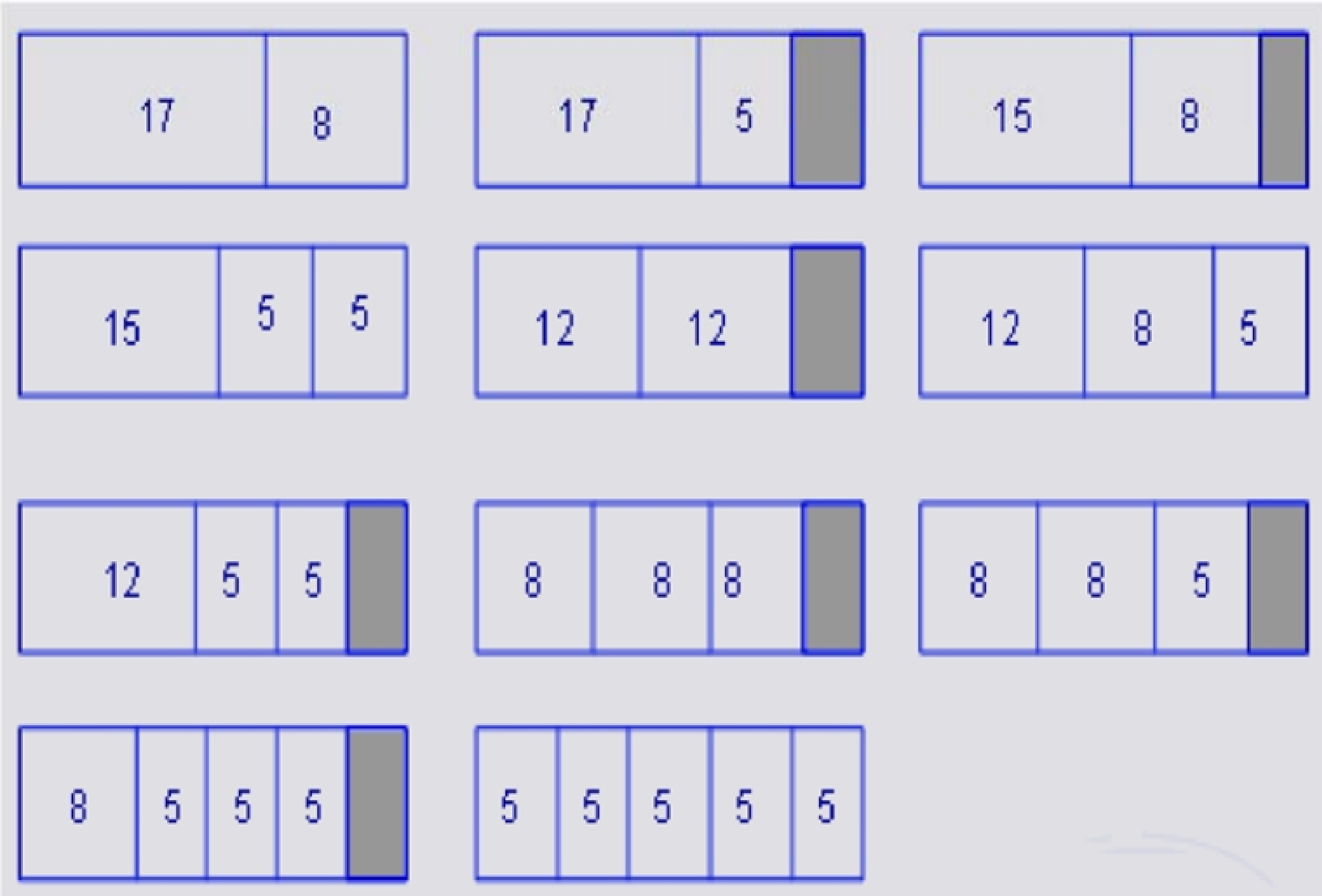
المطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي في كل من الحالات التالية :

(أ). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف تعبر عن التكاليف فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل التغطية التي تحل كل نمط من أنماط المسائل المذكور في الجدول رقم (٤,٨) بأقل قدر ممكن من التكاليف.

(ب). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف تعبر عن التكاليف فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل التجزئة التي يحل أحدها نمط مسائل البرمجة الخطية ويحل الأخر نمط مسائل البرمجة العددية ويحل الثالث نمط مسائل البرمجة غير الخطية وذلك بأقل قدر ممكن من التكاليف الكلية.

(ج). معتبرا أن المعاملات في دالة الهدف هي عبارة عن مؤشرات نوعية لنمط المسألة المختارة فالمطلوب صياغة المسألة كأحد مسائل الحزم التي تحل أكبر قدر ممكن من أنماط المسائل الثلاث بحيث أن كلا من مسائل البرمجة الخطية ومسائل البرمجة العددية ومسائل البرمجة غير الخطية مشمولة بواحد على الأكثر من هذه الحزم الجاهزة .

١٠- تقوم شركة لصناعة المناشف الورقية بصناعة 5 أصناف من المكورات (rolls) الورقية بنفس الطول وبعرض قدره 17 ,15 ,12 ,8 ,5 قدم ُقِدر الطلب عليها بالمقادير 20 ,25 ,30 ,35 ,40 وحدة على الترتيب. لكن عملية التصنيع الفعلية في الشركة تمكن فقط من صناعة مكورات بعرض 25 قدم، ولكن الواقع الفعلي لعملية التقطيع تدل على إمكانية التقطيع وفقا ل 11 نمطا مختلفا من المكورات كما هي موضحة في الشكل رقم (٤,١٤). وهو الأمر الذي سيؤدي إلى أن بعضا من هذه المكورات سيكون أعرض من اللازم. ولذا فقد قررت الشركة استبعاد الأنماط التي تحوي زيادة في العرض تزيد على 5 أقدام (أصغر عرض مطلوب). إذا علمت أن كل مكور ورقي يمكن تقطيعه وفقا لأحد الأنماط المطلوبة. فإن المسألة تكمن في تقطيع هذا النوع الأساسي المصنع من المكورات الورقية والتي تجعل العدد الكلي من المكورات الناتجة أقل ما يمكن. المطلوب صياغة هذه المسألة.



الشكل رقم (٤,١٤).

الباب الثاني

طرق حل مسائل البرمجة العددية

- طرق التفرع والحد
- طريقة التعداد الضمني
- طرق مستوي القطع

مقدمة الباب الثاني

كما رأينا في الفصول الأربعة الأولى (الباب الأول) فإن العديد من المسائل العملية لا يمكن لمتغيراتها أن تأخذ قيماً غير صحيحة وقد أطلقنا عليها اسم مسائل "برمجة عددية" (Integer Programming اختصاراً IP. وقد صنفنا مسائل البرمجة العددية هذه لعدة أصناف كانت على النحو التالي:

(أ) مسائل "*برمجة خطية عددية بحتة* (Pure Integer Linear Programming اختصارا PILP)" إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة.

(ب) مسائل "*برمجة خطية عددية مختلطة* (Mixed Integer Linear Programming اختصارا MILP)" إذا كانت قيم بعض متغيرات هذه المسألة هي قيم صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية.

(ج) مسائل" *برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم* 0-1 Integer Linear Programming اختصارا0-1 ILP)" إذا كانت قيم كل متغيرات هذه المسألة هي 0 أو 1.

وكما سنرى في هذا الفصل فإن ثمة صعوبات كبيرة تبرز لدى حل مسائل البرمجة العددية بأنواعها. وفي الحقيقة فإن حل مسائل البرمجة العددية أكثر صعوبة من حل نظيراتها من مسائل البرمجة الخطية. ويعود السبب في ذلك إلى وجود طرق حل

(خوارزميات Algorithms) بسيطة لمسائل البرمجة الخطية لا تنطبق على نظيراتها من مسائل البرمجة العددية. فعلى سبيل المثال، لو عدنا إلى مثال (٢,٦) من الفصل الثاني والذي كان كما يلي فقد وجدنا أن النموذج الرياضي للمسألة هو:
كبر الدالة:

$$Z = 20x_1 + 15x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 \le 125$$

$$1.5x_2 \le 250$$

$$2x_1 + 3x_2 \le 400$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

حيث x_1 هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان القطنية و x_2 هي ما يجب أن تصنعه الشركة يوميا من القمصان ذات الخيوط التركيبية.

فمن الواضح أن متغيرات القرار في هذه المسألة x_1 و x_2 لا يمكن أن يأخذ قيما غير صحيحة، وبذلك فإن هذه المسألة هي من مسائل البرمجة العددية البحتة.وكما يمكننا ملاحظته من القيد الأول والثالث فإن x_1 يمكن أن يأخذ 126 قيمة تبدأ من الصفر إلى أصغر قيمة صحيحة ل{125,400/2} أي (0,1,2,......,125). أما المتغير x_2 فيمكن أن يأخذ 134 قيمة تبدأ من الصفر إلى أصغر قيمة صحيحة ل {250/1.5,400/3} أي (0,1,2,......,133). وبذلك فإن عدد الحلول الممكنة(وهي التي يأخذ فيها كلاً من

x_1 و x_2 قيمة عددية صحيحة ممكنة) يساوي 126×134= 16884 حلا ممكنا. ولو فرضنا أن الشركة تنتج نوع ثالث من القمصان بمقدار x_3 وأن x_3 يمكن أن يأخذ 121 قيمة مثلا ابتداءً من الصفر فإن عدد الحلول الممكنة للمسألة الناتجة يصبح 16884×121= 2042964 حلا ممكنا.

وكمثال أخر، لو فرضنا أن لدينا 10 أعمال نرغب بتنفيذها على ماكينة واحدة (مثال ذلك أن نصنع 10 قطع غيار على جهاز واحد) فإن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة البسيطة نسبيا يساوي 10×9×8×7×6×5×4×3×2×1=3628000 حلاً لجدولة تنفيذ هذه الأعمال العشرة على ماكينة واحدة.

وهكذا نجد أن عدد الحلول الممكنة لمسائل البرمجة العددية البحتة يزداد أحيانا (طبقا لعدد المتغيرات وطبيعة القيم التي تأخذها) بصور مذهلة.

ونظرا لعدم وجود خوارزميات محددة لحل مسائل البرمجة العددية البحتة، كما هي الحال بالنسبة للبرمجة الخطية مثلا، فإن التعامل مع هذا العدد الهائل من الحلول الممكنة لهذا النوع من المسائل سيكون من الأمور التي يصعب إنجازها عمليا حتى بالحاسبات الرقمية؛ وذلك لأنها تتطلب قدرا كبيرا من الوقت وحجما كبيرا من الحسابات وبالتالي من الذاكرة.

ومع ذلك فإن ثمة بعض الطرق التي تساعد وبدرجة كبيرة من الإسقاط التدريجي لكافة الحلول غير المرشحة لأن تكون حلولا مثلى حتى نصل في النهاية إلى الحل (الحلول) الأمثل (المثلى)، أو نصل إلى مجموعة قليلة جدا من الحلول يكون الحل (الحلول) الأمثل (المثلى) من بينها. ففي مثالنا أعلاه لصناعة نوعي القمصان، لو علم لدينا أثناء عملية دراسة وتحليل القيود أن x_2 لا يقل عن 100 لأدى ذلك إلى إنقاص القيم الممكنة ل x_2 إلى 35 قيمة فقط بدلا من 134 قيمة سابقا ولأدى ذلك إلى إنقاص عدد الحلول الممكنة لمسألة إنتاج نوعي القمصان المشار إليها أعلاه إلى 4410 حلا ممكنا أي أن عدد الحلول الممكنة قد نقص بمقدار 12474.

وكما سنرى فإن معظم طرق الحل التي سنتعرف عليها في هذا الجزء تعتمد ولدرجة كبيرة على أسلوب الإسقاط التدريجي للحلول غير الواعدة بأن تحوي حلا (حلولا) أمثل (مثلى) من بينها.

وسنتعرف في هذا الباب على الطرق الرئيسة التالية المستخدمة في حل مسائل البرمجة العددية البحتة والمختلطة.

١- طريقة التفرع والحد . The Branch- and- Bound Method

٢- طريقة التعداد الضمني .The Implicit Enumeration Method

٣- طريقة مستو القطع. The Cutting Plain Method

حيث سنتعرف على الطريقة الأولى في الفصل الخامس ونتعرف على الطريق الثانية في الفصل السادس، ونتعرف على الطريقة الثالثة في الفصل السابع. وكما أشرنا أعلاه فإن جميع هذه الطرق تستخدم فكرة الإسقاط التدريجي للحلول الممكنة وغير الواعدة بأن يكون الحل (الحلول) الأمثل(المثلى) من بينها. وتعتمد فكرة الإسقاط التدريجي هذه على جملة من الملاحظات الأساسية نورد فيما يلي بعضا منها.

ملاحظة (١)

إذا كان فضاء الحل لمسألة البرمجة العددية الأصلية هو S فإن فضاء الحل لمسألة البرمجة الخطية الناتجة بإسقاط شرط القيم الصحيحة عن متغيرات المسألة الأصلية والتي سبق وأسميناها "المسألة المخففة"، وليكن T ، يحوي S . ويعود السبب في ذلك إلى أن إضافة القيود التي تشترط أن قيم متغيرات المسألة الأصلية هي قيم صحيحة تنقص من عدد الحلول الممكنة وبالتالي فإن مثل هذه الإضافة تجعل S محتوى في T . وفي هذه الحالة فإن قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل "للمسألة المخففة" ولتكن Z، ستكون أفضل من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل للمسألة الأصلية ولتكن W.

ونميز في ذلك حالتين :

حالة (١). الهدف في المسألة الأصلية هو تكبير دالة الهدف ذات الصلة، عندئذ يكون $W \leq Z$ والذي يعني أن *القيمة Z تشكل حدا أعلى للقيمة W*، وعندئذ إذا قمنا بتجزئة المسألة الأصلية لعدة مسائل جزئية *فيمكننا إهمال أي مسألة جزئية ناتجة تكون فيها قيمة W أكبر من قيمة Z*.

حالـــة (٢). الهدف في المسألة الأصلية هو تصغير دالة الهدف ذات الصلة، عندئذ يكون $W \geq Z$ والذي يعني أن *القيمة Z تشكل حدا أدنى للقيمة W*، وعندئذ إذا قمنا بتجزئة المسألة الأصلية لعدة مسائل جزئية *فيمكننا إهمال أي مسألة جزئية ناتجة تكون فيها قيمة W أصغر من قيمة Z*.

الفصل الخامس

طرق التفرع والحد
The Branch- And- Bound Methods

(٥,١) مقدمة

مع أن عدد الحلول الممكنة في مسائل البرمجة العددية هو عدد منته (Finite) بشكل عام، إلا أن إيجاد الحل الأمثل لها مهمة صعبة للغاية حتى في المسائل ذات العدد القليل من المتغيرات. ولتوضيح بعض جوانب هذه الصعوبة، لنفرض مثلا أن المسألة التي نرغب بحلها تحوي 5 متغيرات لا يمكن لأي منها أن يأخذ قيما غير صحيحة، وأن لكل من هذه المتغيرات يأخذ 10 قيم صحيحة ممكنة، فإن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة يساوي $10\times10\times10\times10\times10=100000$ حلا.

ونظرا لعدم وجود خوارزميات محددة لحل هذا النوع من المسائل، فإنه لابد من استعراض جميع هذه الحلول للوصول إلى الأمثل منها وهو من الأمور الصعبة جدا وخاصة إذا كان عدد الحلول الممكنة لهذا النوع من المسائل كبيرا.

إلا أنه، وكما أشرنا أعلاه في مقدمة الباب الثاني، فإن فكرة التخلص التدريجي من الحلول التي لا يمكن أن يكون الحل الأمثل من بينها (والتي أشرنا لها بأنها غير واعدة) ستساعدنا على التقليل السريع من هذه الحلول والإبقاء فقط على الواعدة منها لتسهل علينا بعدها استخلاص الحل(الحلول) الأمثل (المثلى) من بينها. ومن بين الطرق

التي تستخدم مبدأ التخلص التدريجي من الحلول غير الواعدة ما يسمى "*طرق التفرع والحد* (*The Branch- and- Bound Methods*)" .

(٥,٢) عرض عام لطريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية البحتة

تعتمد "*طريقة التفرع والحد*" لحل مسائل "البرمجة العددية البحتة" على القيام أولا بإسقاط الشرط "أن متغيرات المسألة الأصلية لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة" وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والتي أسميناها "المسألة المخففة"، عندئذ

(أ) إذا كانت جميع قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة فعندها يكون هذا الحل هو أيضا حلا أمثليا لمسألة البرمجة العددية الأصلية. ولتوضيح هذا الأمر نورد المثال التالي :

مثال (٥,١)

كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 2x_2$$

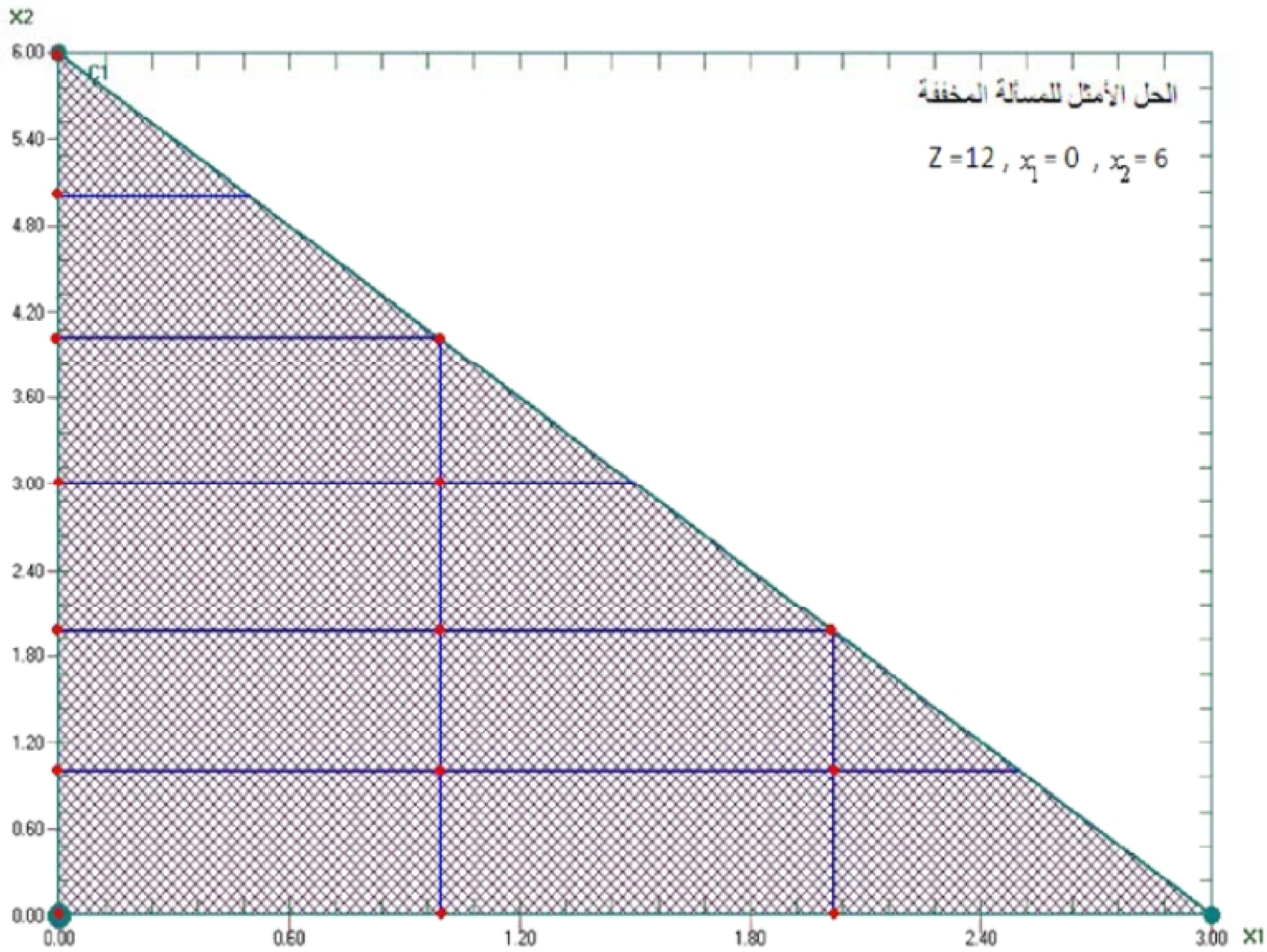
وفقا للقيود :

$$2x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{أعداد صحيحة}$$

إن الحل الأمثل للمسألة المخففة (م.م) هو: $x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad Z = 12$

وبما أن جميع قيم المتغيرات في هذا الحل هي قيم عددية صحيحة، لذا فإن هذا الحل هو أيضا حل أمثلي للمسألة الأصلية (م.أ). (انظر كذلك الشكل رقم ٥,١).



الشكل رقم (٥,١).

(ب) إذا كانت بعض قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة وكان بعضها الآخر قيما عددية ولكنها غير صحيحة (أعداد حقيقية) فإننا نقوم بتجزئة المسألة الناتجة عن هذا الحل إلى عدة مسائل جزئية وذلك من خلال إجراء عمليات تفرع (Branch) ومن ثم حساب الحد (Bound) الأعلى (الأدنى) لمسائل التكبير (التصغير) الجزئية الناتجة وفقا للأسس الواردة في الملاحظة (١) الواردة في مقدمة الباب الثاني (ومن هنا جاء اسم الطريقة التفرع والحد). وسيساعد ذلك في الإسقاط التدريجي لبعض المسائل الجزئية المخالفة لهذه الأسس، حتى نصل في النهاية إلى المسألة الجزئية التي توافق الأسس التي وردت في الملاحظة (١) والتي تكون فيها

القيم المثلى لجميع المتغيرات قيما صحيحة ، حيث نصل عندها إلى الحل الأمثل المنشود.
وسنوضح ذلك من خلال حل المثال التالي :

مثال (٥,٢)

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

الحل

إن المسألة المخففة للمسألة السابقة تنتج عنها بإسقاط الشرط : x_1 , x_2 أعداد صحيحة أي أن المسألة المخففة هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

وسنسمي هذه المسألة باسم "مسألة جزئية1 (اختصارا مج7) .إن الحل الأمثل للمسألة (مج1) كمسألة برمجة خطية هو

$$x_1 = \frac{15}{4} \quad , \; x_2 = \frac{9}{4} \quad , \; Z = \frac{165}{4}$$

انظر كذلك الشكل رقم (٥,٢). وبما أن الهدف في المثال هو التكبير فإن القيمة $Z = \frac{165}{4}$ تشكل "حدا أعلى" لقيمة Z المثلى للمسألة الأصلية، أي أن القيمة المثلى ل Z للمسألة الأصلية لن تتجاوز $\frac{165}{4}$.

وبما أن بعض قيم المتغيرات الأخيرة (هنا كلها) غير صحيحة، فبموجب ما ذكرناه في (ب) السابقة، لابد لنا من تجزئة مج1 إلى مسائل جزئية وذلك بإجراء عملية تفرع على قيم x_1 , x_2 المثلى الناتجة أعلاه. وبشكل عام يمكننا اختيار إما x_1 أو x_2, وإجراء عملية التفرع عليه بالطريق التالية:

لنفرض أننا اخترنا x_1. إن القيمة (الحقيقية) السابق ل x_1 تدل على أن القيم الصحيحة المحتملة ل x_1 ستكون قريبة من أحد الرقمين الصحيحين 3 و4 ولكنها ليست بينهما. أي أنه:

إما أن يكون: $x_1 \geq 4$ أو أن يكون $3 \geq x_1$

ولذا فإننا نضيف أحد هذين القيدين. فلو أضفنا القيد $x_1 \geq 4$ ل مج1 لحصلنا على المسألة الجزئية مج2 التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

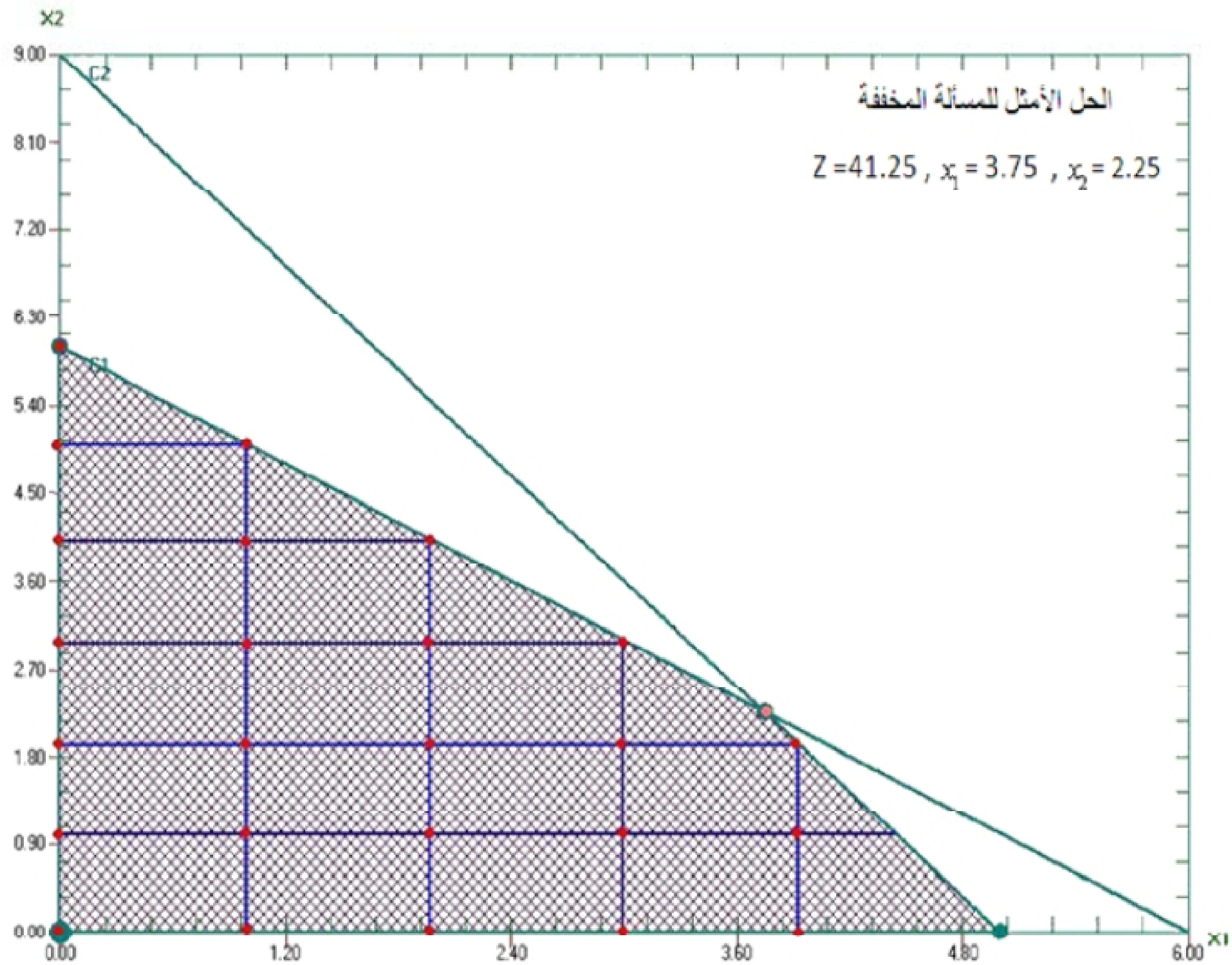
وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٥,٢).

أي أن مج2 = مج1 + القيد $x_1 \geq 4$.

كذلك إذا أضفنا القيد التالي $3 \geq x_1$ ل مج1 لحصلنا على المسألة الجزئية مج3 التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$3 \geq x_1$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

أي أن مج3= مج1+ القيد $3 \geq x_1$.

ويعطي الشكل رقم (٥,٣) فضاء الحل الممكن (Feasible Solution Space اختصار FSS) لكل من المسألتين مج2 (داخل ومحيط المضلع ABCD) ومج3 (داخل ومحيط المضلع FEG).

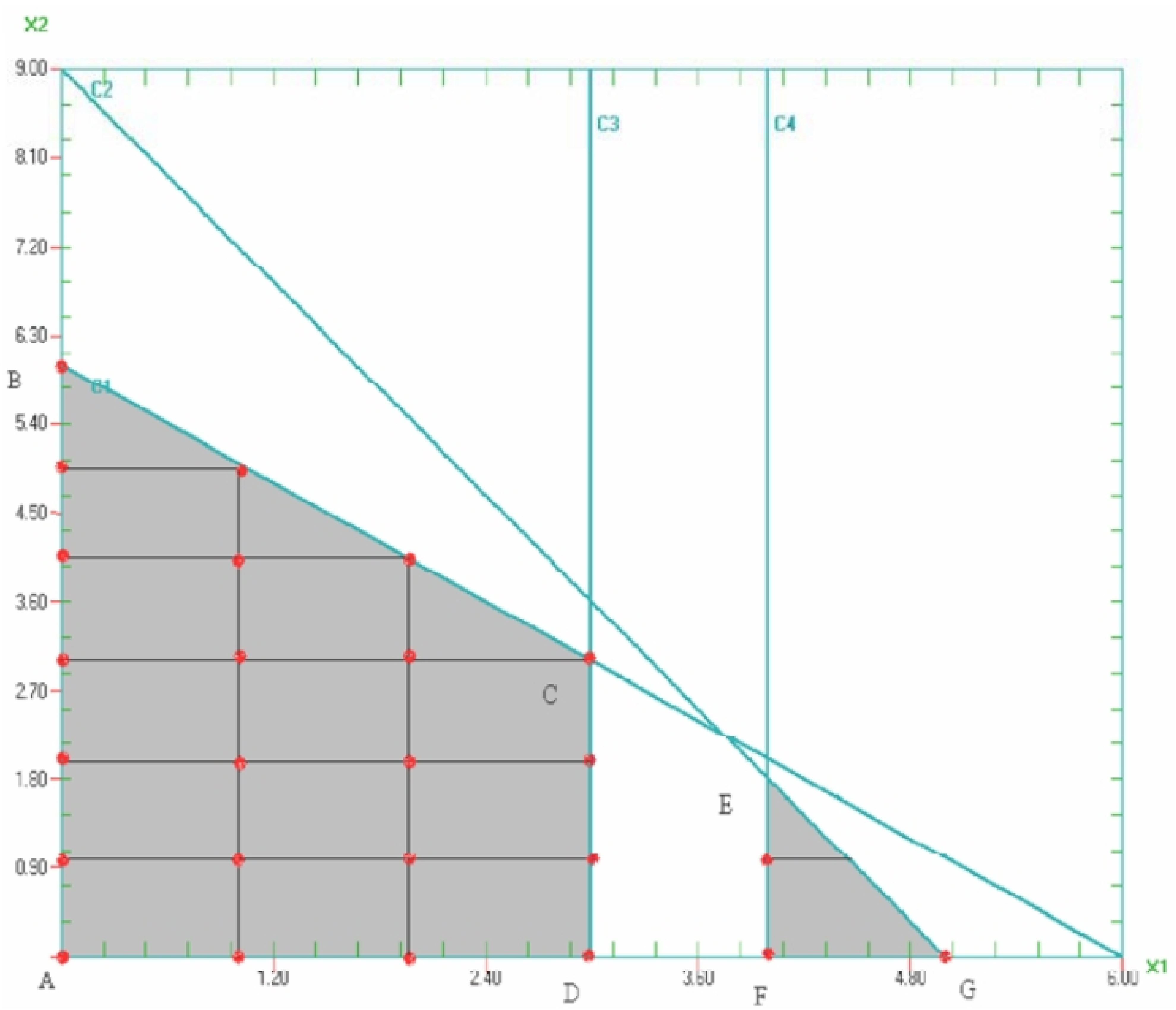
وكما نلاحظ من حلول مج2 ومج3 الموضحة على الشكل رقم (٥,٣) فإن أياً منهما لا يحوي القيمة $x_1 = \frac{15}{4}$ التي استخدمناها للحصول على مج2 ومج3 . ويعني ذلك أن حل المسألة المخففة مج1 لن يتكرر لدى حل كل من مج2 ومج3. نقوم بعد ذلك باختيار أحد المسألتين مج2 أو مج3 بشكل اختياري وحلها كمسألة برمجة خطية. وبشكل عام يصح لدينا المبدأ التالي حول اختيار إحدى المسألتين

(م1). نختار أحدث المسائل الجزئية التي وصلنا إليها في عمليات التفرع، وفي حال وجود أكثر من مسألة جزئية فإننا نختار أحدها.

فلو اخترنا مج2 مثلا فإننا نجد أن الحل الأمثل لها هو:

$$x_1 = 4 \qquad , \ x_2 = \frac{9}{5} \qquad , \ Z = 41$$

وبما أن قيمة Z(Z=41) التي حصلنا عليها في حل المسألة مج2 أقل من تلك التي حصلنا عليه في حل المسألة مج1 ($Z = \frac{165}{4}$) لذا فإن القيمة Z=41 تلغي الحد الأعلى



الشكل رقم (٥,٣).

القديم للمسألة الأصلية لتصبح القيمة Z=41 هي الحد الأعلى الحالي(Current Upper Bound اختصاراً CUP) للمسألة الأصلية.

ولتلخيص ما وصلنا إليه من نتائج فإننا نقوم عادة بتمثيل المسألة المخففة مج1 والمسائل الجزئية المتفرعة عنها على شكل شجرة (Tree) تبدأ من مج1 ويتفرع عنها كل من مج2 ومج3 وهكذا دواليك إلى أن تنتهي جميع عمليات التفرع الممكنة. وعلى سبيل المثال فإن الشكل رقم (٥,٤) يمثل الشجرة التي وصلنا إليها حاليا. الآن، بما أن قيم المتغيرات الناتجة من حل المسألة مج2 ليست جميعها قيما صحيحة ، فإننا نقوم بعملية تفرع جديدة على مج2 وباستخدام أحد المتغيرات الذي نتجت بقيمة غير صحيحة في الحل الأمثل ل مج2. وحيث إن $x_2 = \frac{9}{5}$ ، هو المتغير الوحيد الناتج بقيمة غير صحيحة وحيث إن قيمة x_2 هذه تدل على أنه ، إما أن يكون $x_2 \geq 2$ أو أن يكون $1 \geq x_2$ ، فإننا نضيف أحد القيدين $x_2 \geq 2$ أو $1 \geq x_2$ إلى مج2 لنحصل بذلك على مسألتين جزئيتين من المسألة مج2 وهما مج4 و مج5 حيث مج4 = مج2 + القيد $x_2 \geq 2$ ، ومج5 = مج2 +القيد $1 \geq x_2$.

حيث نجد أن مج4 هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

وأن مج5 هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2$$

وفقا للقيود :

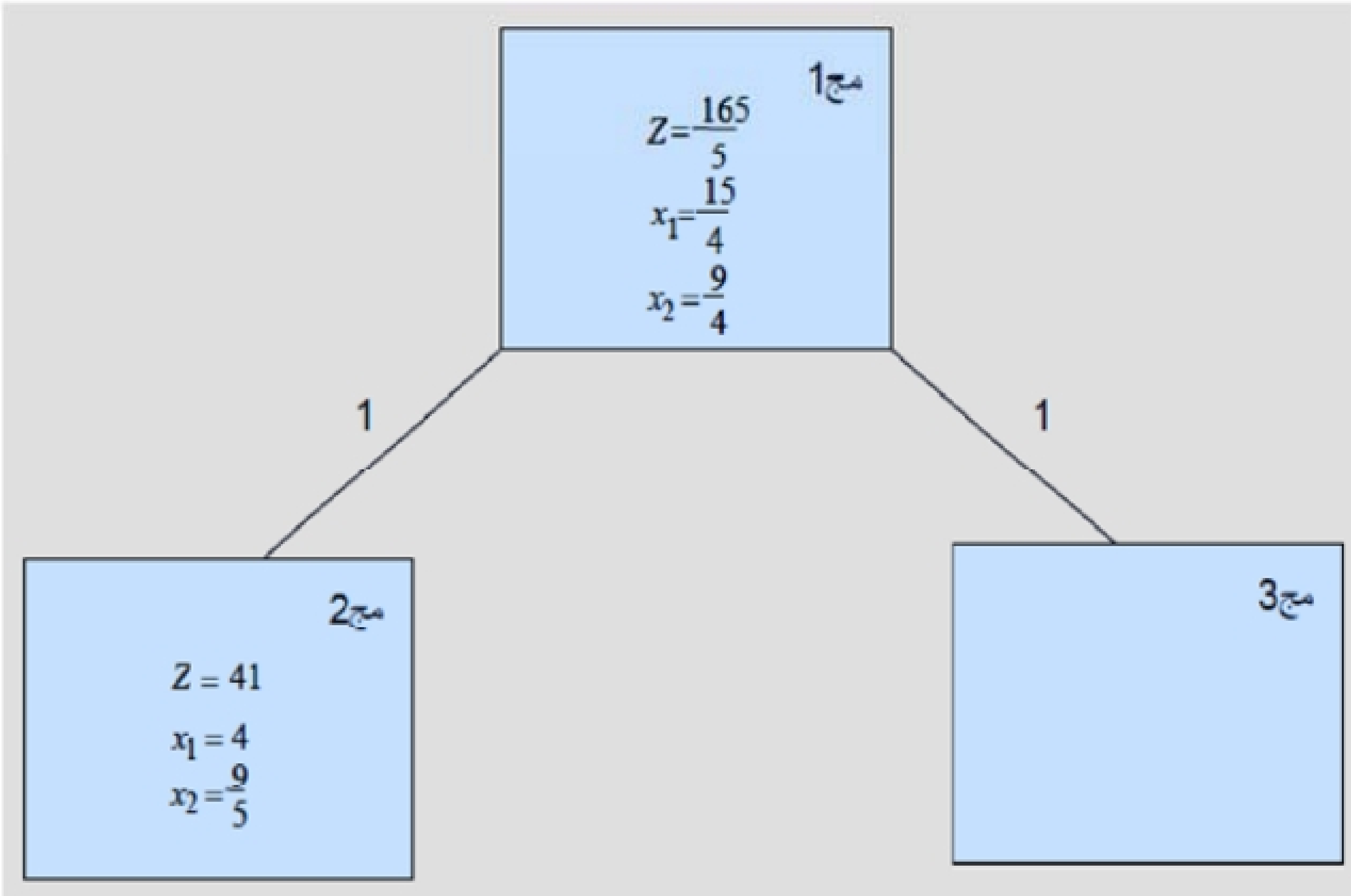
$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1 \geq 4$$

$$1 \geq x_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٥,٤).

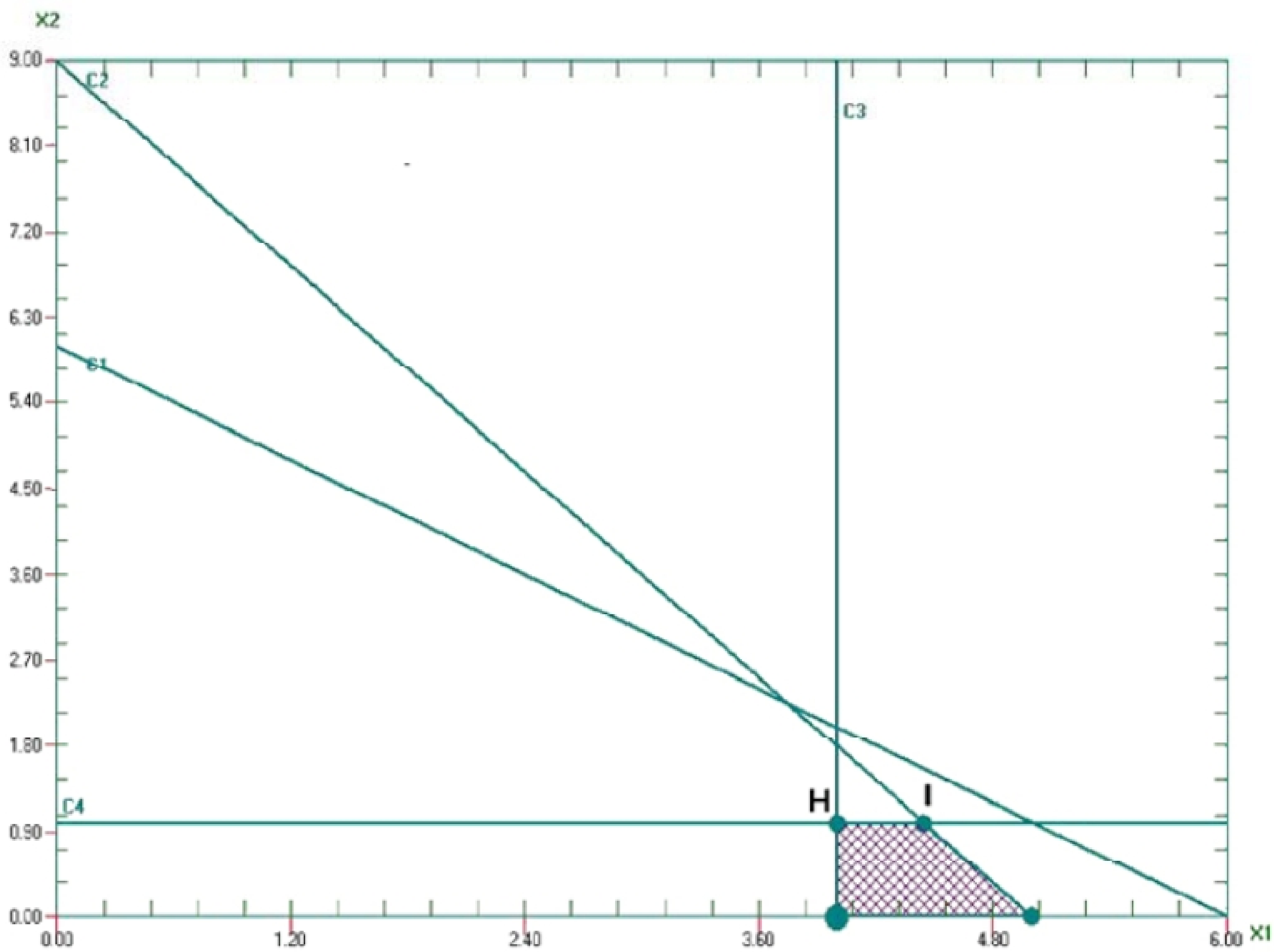
وهنا نلاحظ أن مج4 هي مسألة غير ممكنة وذلك لعدم إمكانية تحقق ثلاثة من قيودها معا وهي القيد الثاني والقيد الثالث والقيد الرابع. ولذا فإننا نشطب (Fathom) مج4 بإشارة × في الشجرة الناتجة ولا نتابع أي عملية تفرع منها. نقوم الآن بحل مج5 فنجد أن فضاء الحل الممكن ل مج5 معطى كما في الشكل رقم (٥,٥) وأن الحل الأمثل لها هو

$$x_1 = \frac{40}{9} \quad , \; x_2 = 1 \quad , \; Z = \frac{365}{9}$$

إن الحد الأعلى الجديد Z=40.56 لا يختلف كثيرا عن سابقه (Z=41)، ومع ذلك فإننا نقوم بالتجزئة من جديد بإجراء عملية تفرع على x_1 حيث تدل القيمة الكسرية الأخيرة ل x_1 أنه إما أن يكون $x_1 \geq 5$ أو أن يكون $4 \geq x_1$. وبذلك نحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج6 = مج5+القيد $x_1 \geq 5$ ، مج7= مج5+ القيد $4 \geq x_1$ وتجدر الإشارة هنا إلى أن فضاء الحل للمسألتين مج6 ومج7 يحوي جميع الحلول الممكنة ذات القيم

الصحيحة والتي كانت من قبل في فضاء الحل ل مج5 ، إلا أن أياً من فضائي الحل ل مج6 أو مج7 لا يمكن أن يحوي القيمة الكسرية السابقة $x_1 = \frac{40}{9}$.



الشكل رقم (٥,٥).

بحسب (م١) فإنه يمكننا اختيار أي من المسألتين مج6 أو مج7 وحلها . فلو اخترنا المسألة مج7 مثلا نجد أن الحل الأمثل لها هو :

$$x_1 = 4 \qquad , \ x_2 = 1 \qquad , \ Z = 37$$

وبما أن قيم المتغيرات في هذا الحل هي قيم صحيحة فإننا نعتبر أن هذا الحل هو حل ممكن لمسألة البرمجة العددية الأصلية، وبالتالي فإنه "حل مرشح Candidate Solution " لأن يكون حلاً أمثليا للمسألة الأصلية.

في هذه الحالة نعتبر أن القيمة Z= 37 التي نتجت عن حل ممكن للمسألة الأصلية بمثابة " حد أدنى Lower Bound " (وذلك عندما تكون المسألة مسألة تكبير كما هي الحال في مسألتنا) لقيمة Z عند الحل الأمثل لهذه المسألة. ومن الجدير أن نلاحظ هنا أنه لا فائدة من تجزئة مج7 ثانية، وذلك لأن فضاء الحل لأي مسألة جزئية من مج7 سيكون محتوى في فضاء الحل للمسألة مج7، وبالتالي فلن ينتج عن هذه المسألة الجزئية قيمة للدالة Z أفضل من القيمة 37 (نذكر بما ورد في الملاحظة (١)).

وبشكل عام يصح لدينا المبدأ التالي:

(م٢). عند الحصول على حل ممكن لمسألة البرمجة العددية الأصلية فإنه يكون مرشحاً لأن يكون حلاً أمثلياً لهذه المسألة. وعندها تمثل قيمة دالة الهدف عند هذا الحل حداً أدنى بالنسبة لمسائل التكبير (حداً أعلى بالنسبة لمسائل التصغير) للقيمة المثلى لهذه الدالة.

خلاصة ما توصلنا إليه إلى الآن هي الوصول إلى الحد الأعلى Z=40.56 والحد الأدنى Z=37 لقيمة Z المثلى. ولمعرفة فيما إذا كانت نتائجنا هذه هي الأفضل أم لا، لابد لنا من تحليل ما تبقى من مسائل جزئية وهي مج6 ومج3. وبحسب (م١) علينا أن نختار مج6 . وبموجب الشكل رقم (٥,٥) نجد أن فضاء الحل ل مج6 يتكون من النقطة(5.0) ولذ فإن الحل الأمثل ل مج6 هو:

$$x_1 = 5 \qquad , \ x_2 = 0 \qquad\qquad , \ Z = 40$$

وهو حل ممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فهو حل مرشح لأن يكون حلا أمثليا. وبذلك يصبح الحد الأدنى الجديد لقيمة Z هو Z=40 وهو أفضل من الحد الأدنى السابق

(Z=37)، ولذا فإننا نشطب المسألة مج7 بإشارة (×) ولا يتبقى لنا عندها سوى المسألة مج3 . وبحل مج3 نجد أن حلها الأمثل هو :

$$x_1 = 3 \qquad , \ x_2 = 3 \qquad , \ Z = 39$$

ومع أن الحل الأمثل ل مج3 هو حل ممكن للمسألة الأصلية إلا أن قيمة Z الناتجة من حل مج3 أسوأ من تلك التي نتجت من حل مج6 . ولذا فإننا نستطيع أن نجزم أن الحل الأمثل ل مج6 وهو:

$$x_1 = 5 \qquad , \ x_2 = 0 \qquad , \ Z = 40$$

هو أيضا الحل الأمثل للمسألة الأصلية. ويعطي الشكل رقم (٥,٦) ملخصاً لجميع عمليات التفرع التي ذكرناها أعلاه وهو يمثل كامل الشجرة الناتجة عن جميع عمليات التفرع التي قمنا بها. إن تطبيق طريقة التفرع والحد في حل المثال (٥,٢) السابق قد مكننا من استنتاج المبدأين (م١) و(م٢). كذلك فإن ثمة *مبادئ أخرى تتعلق بعملية شطب بعض المسائل الجزئية* تم استخدامها لدى تطبيق هذه الطريقة في حل هذا المثال يمكن تلخيصها بما يلي :

(م٣). *يمكن شطب أي مسألة جزئية إذا كانت غير ممكنة (Infeasible).*

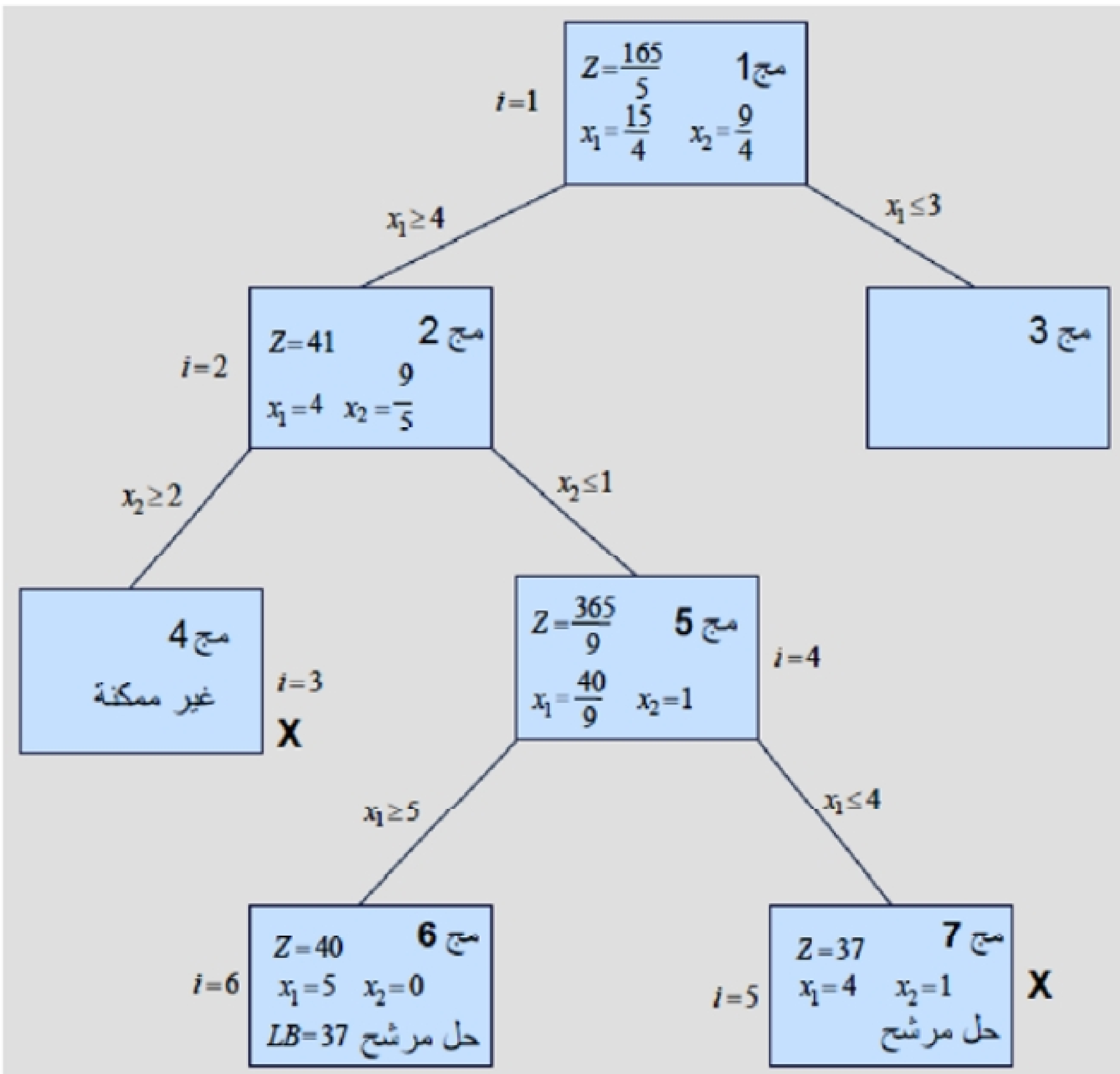
(م٤). *إذا كان الحل الأمثل لمسألة جزئية هو حل ممكن للمسألة الأصلية إلا أن الحد الأدنى الناتج لغايته بالنسبة لمسائل التكبير (الحد الأعلى بالنسبة لمسائل التصغير) أسوأ (أصغر بالنسبة لمسائل التكبير وأكبر بالنسبة لمسائل التصغير) من قيمة دالة الهدف عند هذا الحل فيمكن شطب هذه المسألة الجزئية.*

فمثلا قمنا بشطب مج4؛ لأنها غير ممكنة وهو ما ينطبق مع (م٣)، كما قمنا بشطب مج7 لأن قيمة دالة الهدف عند مج6 أفضل من الحد الأدنى الذي نتج عن حل

مج7 وهو ما ينطبق مع (م٤). ثمة ملاحظات أخرى تتعلق بالمبدأ (م١) وبالمتغير الذي نجري عليه عملية التفرع لابد من تسجيلها.

ملاحظة (٥,١)

(أ) .عندما قمنا بحل المسألة المخففة مج1 للمسألة الأصلية فقد كان قيمة كل من المتغيرين x_1, x_2 المثلى قيما عددية غير صحيحة وهي ($x_2 = \frac{9}{4}$, $x_1 = \frac{15}{4}$) وقد ذكرنا وقتها أنه يمكن اختيار أي من المتغيرين لإجراء عملية التفرع عليه، وقد قمنا باختيار x_1. والسؤال الآن:



الشكل رقم (٥,٦).

إذا كانت القيم المثلى لمسألة جزئية لأكثر من متغير هي قيمة عددية غير صحيحة (قيمة كسرية) فهل لاختيار أحد المتغيرات لإجراء عملية التفرع عليه من تأثير في عملية الوصول إلى الحل الأمثل النهائي، وهل من قاعدة مفيدة لهذا الاختيار؟.

في الحقيقة لا توجد إجابة محددة لهذا السؤال، لكن البعض اختار المبدأ التالي:

(م٥). الأفضلية في عملية التفرع يجب أن تكون للمتغير الذي يملك أكبر قيمة كسرية والذي تكون قيمته من الناحية الاقتصادية أو القرارية للمسألة قيد الدراسة هي الأهم، أما في برامج الحواسيب الجاهزة فإن الأفضلية تكون للمتغير الذي يملك القيمة الكسرية الأقل.

ففي مثالنا الحالي فإن القيمة الكسرية في كل من x_1, x_2 هي نفسها في الحل الأمثل ل مج1، ولذا كان هناك اختيار في عملية التفرع على أحدهما وقد تم اختيار x_1 لإجراء عملية التفرع عليه. أما في عمليات التفرع اللاحقة فلم يكن لدينا إلا متغيراً واحداً يملك قيمة كسرية ولذا كان خيارنا وحيداً فيها.

(ب). وفقا للمبدأ (م١) فإننا نختار أحدث مسألة جزئية نصل إليها ونقوم بحلها ثم نعود أدراجنا (Backtrack) لحل المسائل الجزئية المتبقية حسب درجتها في الحداثة، وقد قمنا بتطبيق هذا المبدأ لدى حل المثال (٥,٢) السابق.

لكن منطق الأمور يقتضي أن نحل المسألة الجزئية التي تملك أفضل قيمة لدالة الهدف دون التقيد بالمبدأ (م١) حيث نتوقع عندها أن نصل إلى الحل الأمثل بعدد أقل من التكرارات. وفي هذه الحالة، فإن مسارنا في اختيار المسائل الجزئية لا يكون متدرجا وفق حداثة المسائل بل تكون لدينا قفزات نوعية (Jump-tracking) نختار فيها المسائل الجزئية التي تملك أفضل قيمة حالية لدالة الهدف.

(ج). إن حل المسائل الجزئية الناتجة من عمليات التفرع غالباً ما يكون باستخدام "طريقة السمبلكس الثنوية The Dual Simplex Method " . ويعود السبب في ذلك إلى أنه للوصول إلى الحل الأمثل بعد إضافة قيد جديد فإننا نطبق طريقة السمبلكس الثنوية

اعتبارا من الحل الأمثل للمسألة التي وصلنا إليها قبل عملية إجراء التفرع (راجع هذه الطريقة في الفقرة (١,٧) من الفصل الأول).

(٥,٣) طريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية المختلطة

The Branch and Bound Method for Solving Mixed Integer Programming Problems

كما سبق وأشرنا أعلاه فإننا نطلق اسم " مسألة برمجة عددية مختلطة "على المسائل التي لا تأخذ بعض قيم متغيراتها إلا قيماً عددية صحيحة، بينما يأخذ باقي المتغيرات قيماً اختيارية. وتستخدم طريقة التفرع والحد الموضحة بالفقرة السابقة لحل هذا النوع من المسائل، ولكن بإجراء عمليات التفرع على المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة فقط. ويعتبر أي حل نصل إليه من حل مسألة جزئية ناتجة بأنه "حل مرشح لأن يكون حلاً أمثليا" إذا كانت قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما صحيحة في هذا الحل هي فعلاً قيم صحيحة. ولتوضيح الكيفية التي يتم فيها تطبيق طريقة التفرع والحد لحل هذا النوع من المسائل سنقوم بحل مثال (٢,٣) من الفصل الثاني والذي نعيد كتابته النموذج الرياضي له ثانية لأغراض التكامل في المثال التالي:

مثال (٥,٣)

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 + x_2$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1 + x_2 \le 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

الحل

نبدأ أولاً بحل المسألة المخففة (والتي سنرمز لها بالرمز مج1) بإسقاط شرط أن x_1 عدد صحيح فنجد أن فضاء الحل لهذه المسألة معطى كما في الشكل رقم (٥,٧) وأن الحل الأمثل لها هو:

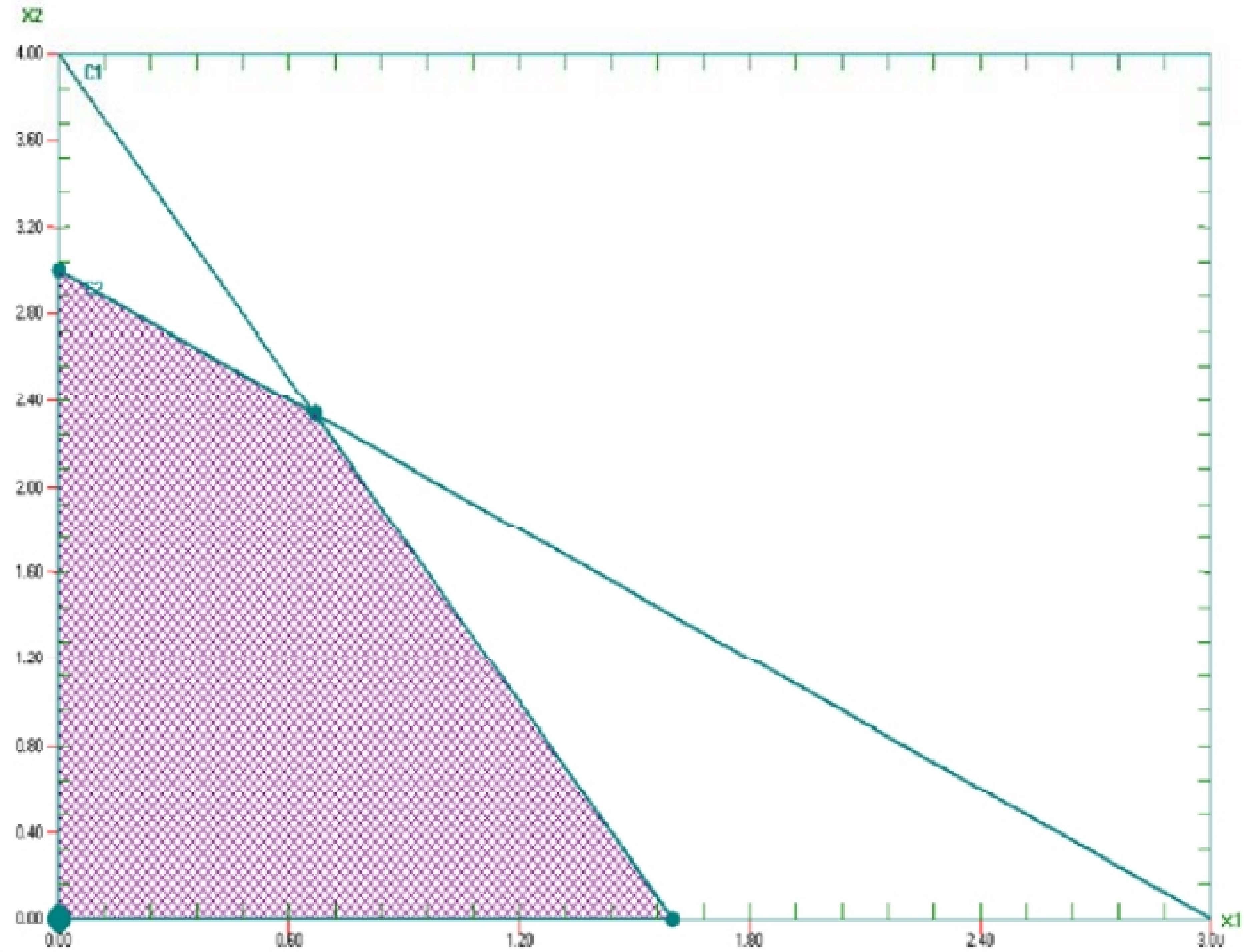
$$x_1 = \frac{2}{3} \quad , \; x_2 = \frac{7}{3} \quad , \; Z = \frac{11}{3}$$

وبذلك فإن الحد الأعلى الحالي لقيمة Z للمسألة الأصلية هو Z=11/3 . وبما أن x_1 عدد صحيح و x_2 عدد حقيقي فإننا نقوم بعملية التفرع على x_1 فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين مج2 ومج3 حيث مج2 = مج1 + القيد $x_1 \geq 1$ و مج3= مج1+ القيد $0 \geq x_1$. وحلولهما على الترتيب هي:

$$x_1 = 0 \quad , \; x_2 = 3 \quad , \; Z = 3$$ (الحل الأمثل ل مج2)

$$x_1 = 1 \quad , \; x_2 = \frac{3}{2} \quad , \; Z = \frac{7}{2}$$ (الحل الأمثل ل مج3)

وكلا هذين الحلين هو حل ممكن للمسألة الأصلية وبالتالي فكل من هذين الحلين مرشح لأن يكون حلاً أمثلياً لها، كما أن قيمة Z في كل منهما تمثل حداً أدنى لقيمة Z المثلى في المسألة الأصلية، ولكن القواعد التي وصلنا إليها سابقاً تقتضي شطب المسألة الجزئية مج2 والإبقاء على حل مج3 كمرشح وحيد لأن يكون الحل الأمثل للمسألة الأصلية. ونظراً لعدم إمكانية إجراء مزيد من عمليات التفرع على x_1 فإن حل مج3 هو الحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية.



الشكل رقم (٥,٧).

(٥,٤) خلاصة طريقة التفرع والحد
Summary of Branch and Bound Method

إذا كانت المسألة الأصلية قيد الدراسة هي مسألة برمجة عددية بحتة أو مختلطة ورمزنا بالرمز Z لدالة الهدف في المسألة سواء كانت المسألة تكبير أو تصغير ورمزنا بالرمز LB (اختصار Lower Bound) للحد الأدنى لقيمة Z وبالرمز UB (اختصار Upper Bound) للحد الأعلى لقيمة Z ، فإننا نخلص مما سبق إلى أن العمل في طريقة التفرع والحد يكون وفقا لما يلي:

الخطوة الابتدائية

ضع $UB = \infty$ ($LB = -\infty$) بالنسبة لمسائل التكبير (مسائل التصغير)، ثم حل المسألة المخففة للمسألة الأصلية لتحصل على قيمة جديدة ل UB(LB) بالنسبة لمسائل

التكبير (مسائل التصغير). ونسميه الحد الأعلى الحالي (الحد الأدنى الحالي) بالنسبة لمسائل التكبير (بالنسبة لمسائل التصغير).

خطوة التفرع

(أ) إذا كانت جميع قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة والناتجة من حل المسألة المخففة في الخطوة الابتدائية هي فعلا قيم عددية صحيحة فإننا نتوقف، وعندئذ يكون حل المسألة المخففة هو الحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية وقيمته هي قيمة Z التي حصلنا عليها في الخطوة الابتدائية.

(ب) إذا كان بعض قيم المتغيرات التي لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة والناتجة من حل المسألة المخففة في الخطوة الابتدائية هي قيم عددية غير صحيحة فإننا نقوم بعملية التفرع على أحدها لنحصل على مسألتين جزئيتين، ثم نختار أحدهما ونحلها ونحدد قيمة Z الناتجة للمسائل الممكنة منهما ونعتبر هذه القيمة بمثابة الحد الأدنى (الحد الأعلى) الحالي لمسائل التكبير (مسائل التصغير).

(ج) نعتبر قيمة الدالة Z في حل أي من المسائل الجزئية المتفرعة، وغير المرشحة لأن تكون حلا للمسألة الأصلية، بمثابة حد أعلى(حد أدنى) حالي بالنسبة لمسائل التكبير (مسائل التصغير) يتمم استبداله بحد أعلى (حد أدنى) جديد عند حصولنا على مسألة متفرعة جديدة تكون فيها قيمة الدالة Z أفضل من سابقتها.

خطوة شطب المسائل الجزئية

نقوم بشطب أي مسألة جزئية ممكنة وناتجة من عملية تفرع ما في الحالات التالية:

١- إذا كان حل هذه المسألة غير ممكن.

٢- إذا قيمة Z الناتجة لها أكبر من الحد الأعلى الحالي بالنسبة لمسائل التكبير (أصغر من الحد الأدنى الحالي بالنسبة لمسائل التصغير).

٣- نختار أفضل المسائل الجزئية الممكنة ونحدِّث فيها قيمة UB‌(LB) ونسميها "المسألة المرشحة أو الواعدة".

خطوة التوقف

نتوقف عن إجراء أي عمليات تفرع جديدة عندما ننتهي من جميع عمليات الشطب وعندها نختار أفضل المسائل الواعدة وهي التي تملك أكبر (أصغر) قيمة صحيحة لدالة الهدف في مسائل التكبير (التصغير).

(٥,٥) طريقة التفرع والحد لحل مسائل البرمجة العددية بمتغيرات ثنائية القيم

The Branch and Bound Method for Solving (0-1)IP

كما رأينا في الفصول الثاني والثالث والرابع من الجزء الأول، فإن متغيرات القرار لكثير من "مسائل البرمجة العددية هي متغيرات ثنائية القيم". كما أننا رأينا أنه يمكن كتابة أي مسألة برمجة خطية عددية عامة على شكل مسألة "برمجة عددية بمتغيرات ثنائية القيم" (راجع الفقرة (٣,٢,٢,١) من الفصل الثالث).

ونود أن نشير هنا إلى أنه لا توجد خطوات محددة لحل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم باستخدام طريقة التفرع والحد كما كان الأمر في مسائل البرمجة العددية البحتة والمختلطة، ولكن هذه الخطوات تعتمد على طبيعة مسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم التي نرغب بحلها.

وسنوضح هذا الأمر من خلال حل بعض مسائل البرمجة العددية *ذات المتغيرات الثنائية القيم* التي تعرفنا عليها في الفصل الثالث من هذا الكتاب.

(٥,٥,١) حل مسألة حقيبة الظهر البسيطة

بالعودة إلى مسألة حقيبة الظهر البسيطة من الفصل الثالث، فقد وجدنا أن النموذج العام لهذه المسألة كان على النحو التالي:

كبر الدالة:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots\dots\dots + c_nx_n$$

وفقا للقيود:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ...+ a_nx_n \leq b$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,......,n$$

حيث c_i تمثل العائد (الربح) الناتج من حمل السلعة i ، و a_i تمثل ما تستهلكه الوحدة (وزن الوحدة) من (المورد) b والتي تمثل السعة الكلية للحقيبة. ولحل هذه المسألة بطريقة التفرع والحد يمكننا الاستفادة من ميزتين خاصتين بهذا النوع من المسائل نوضحهما فيما يلي:

الميزة (١). بما أن كل من المتغيرات x_j لا يأخذ إلا أحد القيمتين 0 أو 1 فإننا لا نقوم بأي عملية تفرع على أي من هذه المتغيرات لأنها ستنتج فرعين يكون في أحدهما $x_j = 1$ وفي الأخر $x_j = 0$.

الميزة (٢). يمكن حل المسألة المخففة والمسائل الجزئية الناتجة عنها بعملية فحص دقيق للنسبة $\frac{c_i}{a_i}$ والتي تمثل الفائدة النسبية المتحققة من وحدة من السلعة i لدى استهلاكها a_i وحدة من المورد الذي يتوافر منه b وحدة. ويمكننا تحقيق الهدف (جعل Z أكبر ما يمكن) بعملية اختيار للسلع التي تملك أكبر قيمة للنسبة $\frac{c_i}{a_i}$ بشكل متدرج (الأكبر ثم الذي يليها في الكبر وهكذا) وإعطاء قيم المتغيرات المقابلة القيمة 1 ، محاولين استهلاك أكبر قدر ممكن من المورد المتاح منه b وحدة . عندئذ ، إذا تم استهلاك كامل هذا المورد بالقيم 1 لجميع المتغيرات التي تملك فيها $\frac{c_i}{a_i}$ أكبر القيم نكون قد وصلنا للحل الأمثل المنشود الذي تكون فيه قيم المتغيرات التي تم اختيارها مساوية للواحد وقيم المتغيرات الباقية أصفاراً . أما إذا بقي جزء غير صحيح فإننا نقوم بعملية

التفرع على المتغير الثنائي القيمة الأخير، أي على المتغير الذي يملك أقل النسب $\frac{c_i}{a_i}$ من بين المتغيرات التي تم اختيارها.

وللتوضيح دعنا نقوم بتحليل وحل المثال التالي:

مثال (٥,٤)

يرغب أحد المستثمرين باستثمار مبلغ 14 مليون ريال في بعض من 4 محافظ استثمارية متوافرة في أسواق الاستثمار حاليا. يبين الجدول رقم (٥,٢) قيمة الوحدة (مليون ريال) في كل من هذه المحافظ والربح المتوقع منها (مليون ريال). يرغب المستثمر باختيار المحافظ الاستثمارية المناسبة من بين المحافظ الأربع المتوافرة له والتي تجعل مجموع الربح الكلي المتوقع منها أكبر ما يمكن علما بأن نظام هذه المحافظ لا يسمح باستثمار جزء من الوحدة في أي من هذه المحافظ ولا يسمح كذلك باستثمار أكثر من وحدة في أي منها. المطلوب صياغة هذه المسألة وإيجاد الحل الأمثل لها بطريقة التفرع والحد.

الجدول رقم (٥,٢). بيانات المثال (٥,٤).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4
المبلغ المطلوب للوحدة (مليون ريال)	5	7	4	3
الربح المتوقع للوحدة (مليون ريال)	16	22	12	8

الحل

وفقا لبيانات المسألة فمن الواضح أن القرار بالنسبة لأي من المحافظ الأربع هو أن يختارها أو لا يختارها المستثمر ولذا فإن متغيرات القرار هي المتغيرات الثنائية القيم المعرفة كما يلي:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم اختيار المحفظة } j \text{ للاستثمار} \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

والمسألة الناتجة هي مسألة "برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم" نموذجها الرياضي هو:

كبر الدالة:

$$Z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 14$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3,4$$

كما نلاحظ فإن هذا النموذج الرياضي يشبه النموذج الرياضي ل "مسألة حقيبة الظهر البسيطة" والتي سبق لنا التعرف عليها في الفصل الثالث. سنوضح فيما يلي كيفية تطبيق الميزة (٢) من خلال حل المثال (٥,٤) بالاستفادة من هذه الميزة.

حل مثال (٥,٤)

نقوم أولا بحساب النسب $\frac{c_i}{a_i}$ الخاصة ببيانات المثال فنجد أن النتائج كما هي معطاة في الجدول رقم (٥,٣). ومن نتائج هذا الجدول ومما شرحناه أعلاه في نعطي $x_1 = 1$ أي أننا نستثمر في المحفظة الاستثمارية 1 ويستهلك ذلك 5 مليون ريال من أصل ال 14 مليون المتوافرة فيتبقى 14- 5=9 مليون ، ثم نعطي $x_2 = 1$ أي أننا نستثمر كذلك في المحفظة 2 ما مقداره 7 مليون فيتبقى لدينا 9- 7=2 مليون . ولما كان المبلغ المتبقي لا يكفي لاستثمار وحدة كاملة في المحفظة 3 التالية في الترتيب التنازلي حيث تتطلب هذه المحفظة 4 مليون ، فإننا نضع $x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. وبذلك يكون حل المسألة المخففة، والتي سنسميها مج1، هو:

$$x_4 = 0 , \quad x_3 = \frac{1}{2} \;، \quad x_1 = 1 \;, \quad x_2 = 1$$ وقيمته Z= 44

ويكون لدينا UB=44 . نقوم الآن بإجراء التفرع على $x_3 = \frac{1}{2}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين مج2= مج1 + القيد $x_3 = 0$ و مج3 = مج1 + القيد $x_3 = 1$. نختار أحد المسألتين ولتكن مج3 (الأحدث وفقا للمبادئ أعلاه). وفي مج3 لابد لنا من التقيد بالقيد $x_3 = 1$ أي الاستثمار في المحفظة 3 والتي تستهلك 4 مليون فيتبقى لنا 14- 4=10 مليون. ولما كانت أكبر نسبة هي التي تقابل x_1 فإننا نختار x_1 =1 والذي يعني اختيار الاستثمار في المحفظة1 والتي تستهلك 5 مليون .

الجدول رقم (٥,٣). النسب $\frac{c_i}{a_i}$ لبيانات المثال (٥,٤).

رقم المحفظة الاستثمارية	1	2	3	4
النسبة $\frac{c_i}{a_i}$	3.2	3.143	3	2.67
النسبة $\frac{c_i}{a_i}$ مرتبة تنازليا	3.2	3.143	3	2.67

وبذلك يتبقى من المبلغ 10- 5 =5 مليون . ثم نختار x_2 المقابل لأكبر نسبة تالية . ونظرا لأن المحفظة المقابلة للمتغير x_2 تستهلك 7 مليون أي أكثر من المبلغ المتبقي 5 مليون فإننا نضع $x_2 = \frac{5}{7}$. وبذلك يكون حل المسألة مج3 هو:

$$x_4 = 0 \quad x_2 = \frac{5}{7} \;، \quad x_3 = 1 \;, \quad x_1 = 1$$ وقيمته Z=43.7143

نقوم الآن بإجراء التفرع على المتغير $x_2 = \frac{5}{7}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج4= مج3 + القيد $x_2 = 0$ و مج5 = مج3 + القيد $x_2 = 1$

وحل مج4 هو $x_4 = 1$ $x_2 = 0$ ، $x_3 = 1$, $x_1 = 1$ وقيمته Z= 36 .

إن هذا الحل هو حل ممكن لذا نضع LB = 36 كقيمة حالية للحد الأدنى لقيمة Z للمسألة الأصلية.

وحل مج5 هو $x_4 = 0$ $x_3 = 1$ ، $x_2 = 1$, $x_1 = \frac{3}{5}$ وقيمته Z= 43.6 .

نقوم الآن بإجراء التفرع على $x_1 = \frac{3}{5}$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج6=مج5 + القيد $x_1 = 0$ و مج7= مج5 + القيد $x_1 = 1$

وحل مج6 هو $x_4 = 1$ $x_3 = 1$ ، $x_2 = 1$, $x_1 = 0$ وقيمته Z= 42 .

وحل مج6 هو أيضا حل ممكن قيمة Z فيه أكبر من قيمة LB الحالية، لذا فإننا نحدث قيمة LB لتصبح LB= 42 ، الأمر الذي يستدعي شطب المسألة مج4 . وحل مج7 هو:

$$x_4 = 0 \qquad x_3 = 1 \text{ ، } \quad x_2 = 1 \text{ , } \quad x_1 = 1$$

إلا أن هذا الحل غير ممكن لأنه لا يحقق جميع القيود، لذا نقوم بشطب مج7 . نكون بذلك قد انتهينا من جميع عمليات التفرع الخاصة بالمسألة الجزئية مج3 . نعود الآن للمسألة الجزئية مج2 وهي مج2= مج1 + القيد $x_3 = 0$ وحلها هو $x_4 = \frac{2}{3}$ ، $x_3 = 0$ ، $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ وقيمته Z=43.3333 . ويقتضي هذا الحل أن نقوم بالتفرع على $x_4 = \frac{2}{3}$ لنحصل بذلك على المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج8 = مج2+ القيد $x_4 = 0$ و مج9 = مج2 + القيد $x_4 = 1$

وحل مج8 هو $x_4 = 0$ ، $x_3 = 0$ ، $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ وقيمته Z=38 .

وهو حل ممكن إلا أن قيمته أقل من الحد الأدنى الحالي (LB=42)، لذا نشطب مج8 .

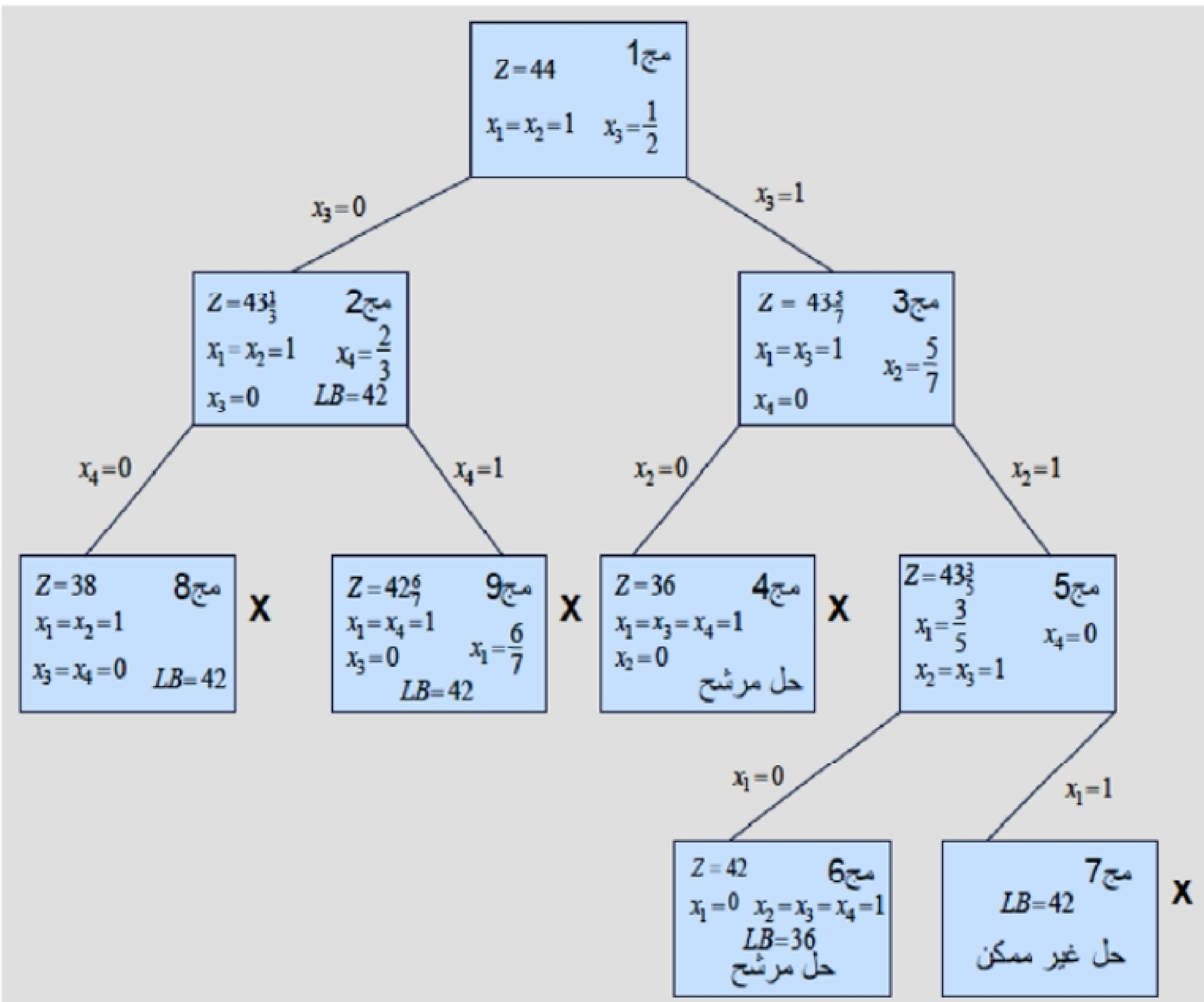
وحل مج9 هو $x_4 = 1$ ، $x_3 = 0$ ، $x_2 = \frac{6}{7}$, $x_1 = 1$ وقيمته Z=42.857 .

هنا علينا أن نستخدم x_2 لعملية تفرع جديدة لكننا لن نجري مثل هذه العملية لأننا لن نحصل على أحسن مما حصلنا عليه سابقا ، ذلك أن قيمة Z عند أي حل ممكن من هذا التفرع لن تزيد على 42 والتي حصلنا عليها عند حل ممكن سابق هو:

$$x_4 = 1 \quad ، \quad x_3 = 1 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_1 = 0 \quad \text{وقيمته} \quad Z = 42$$

وبذلك يكون الحل الأخير هو الحل الأمثل للمسألة.

ويعطي الشكل رقم (٥,٩) ملخصا لحل مسألة المثال (٥,٤) السابق.



الشكل رقم (٥,٩).

(٥,٥,٢) حل مسألة البائع المتجول المتناظرة

كما رأينا في الفصل الرابع فإن مسألة البائع المتجول تتلخص في أن شخصا ما (بائع) يرغب بزيارة n مدينة مختلفة ابتداءً من مدينته (مسقط رأسه) بحيث يزور كل من هذه المدن مرة واحدة فقط ليعود أخيرا إلى بيته (مدينته) بأقصر طريق ممكنة. سنرمز للمسافة بين المدينتين (i, j) ، وهي مسافة معلومة، بالرمز c_{ij}. فإذا كانت المسافة المقطوعة بين المدينتين (i, j) تساوي المسافة المقطوعة بين المدينتين (j,i) أي كان $c_{ij} = c_{ji}$ قلنا عن المسألة إنها *متناظرة* وإلا قلنا عنها إنها غير *متناظرة*. وعندما يتعذر الذهاب من المدينة i إلى المدينة j جاز لنا أن نضع c_{ij} مساوية لقيمة كبيرة جدا M أو أننا نحذف المتغيرات المقابلة من النموذج الرياضي للمسألة. وفي جميع الحالات تصبح المسألة هي:

إيجاد الطريق (المثلى) التي تجعل مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول بين المدن (ابتداء من مدينته والعودة إليها) أقل ما يمكن.

إن معظم الصياغات المتعلقة بالحالة المتناظرة تفترض أن $i < j$ وتعرف متغيرات القرار x_{ij} على الشكل التالي:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا احتوت الجولة على ضلع يربط } i \text{ بـ } j \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

إن وجود ضلع يصل بين المدينة i والمدينة j يعني ضمنا وجوده بين j و i وللضلعين نفس التكلفة. وقد وجدنا أن النموذج الرياضي لمسألة البائع المتجول المتناظرة كمسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم قد كان على النحو التالي:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{i} \sum_{j>i} c_{ij} x_{ij} \quad \text{(مجموع المسافات التي يقطعها البائع المتجول)}$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2, \qquad \text{لجميع قيم } i$$

لجميع المجموعات الجزئية الحقيقية S حيث $|S| \geq 3$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S,\, j>i} x_{ij} + \sum_{i \notin S} \sum_{j \in S,\, j>i} x_{ij} \geq 2,$$

$$x_{ij} = 1 \text{ أو } 0, \quad i, j;\ j > i \text{ لجميع قيم}$$

والمجموعة الأولى من القيود تبين أن قيم اثنين بالضبط من المتغيرات x_{ij} المتعلقة في مدينة ما i يمكن أن تكون مساوية للواحد في أي حل ممكن للمسألة، أحدهما ينتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تسبقها في جولة ممكنة (حل ممكن) والأخرى تنتج من ربط المدينة i بالمدينة التي تليها في هذه الجولة. وتضمن لنا المجموعة الثانية من القيود عملية التخلص من الجولات الجزئية حيث تؤدي هذه القيود إلى وجوب احتواء أي جولة على نقاط من S ونقاط من خارج S مرتين على الأقل.

ولتوضيح كيفية حل مسألة البائع المتجول المتناظرة بطريقة التفرع والحد نسوق المثال التالي:

مثال (٥,٥)

يبين الجدول رقم (٥,٤) عملية ربط ممكنة بين 5 مدن حيث تدل الأرقام الموضحة في هذا الجدول على الزمن اللازم بالدقيقة للتنقل بين هذه المدن. المطلوب إيجاد الجولة ذات الزمن الأصغر والتي تسمح بالمرور في كل مدينة مرة واحدة بالضبط وأن نوضح لماذا يمكن اعتبار هذه المسألة كمسألة (بائع متجول) متناظرة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة باستخدام طريقة التفرع والحد.

الحل

نظراً لأن المسألة تتطلب استخدام جولة مغلقة بحيث تسمح بزيارة كل مدينة فهي مسألة بائع متجول. وهذه المسألة متناظرة لأن الوقت اللازم للمرور من i إلى j هو نفس الوقت اللازم للمرور من j إلى i.

الجدول رقم (٥,٤).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	0	132	217	164	58
2	132	0	290	201	79
3	217	290	0	113	303
4	164	201	113	0	196
5	58	79	303	196	0

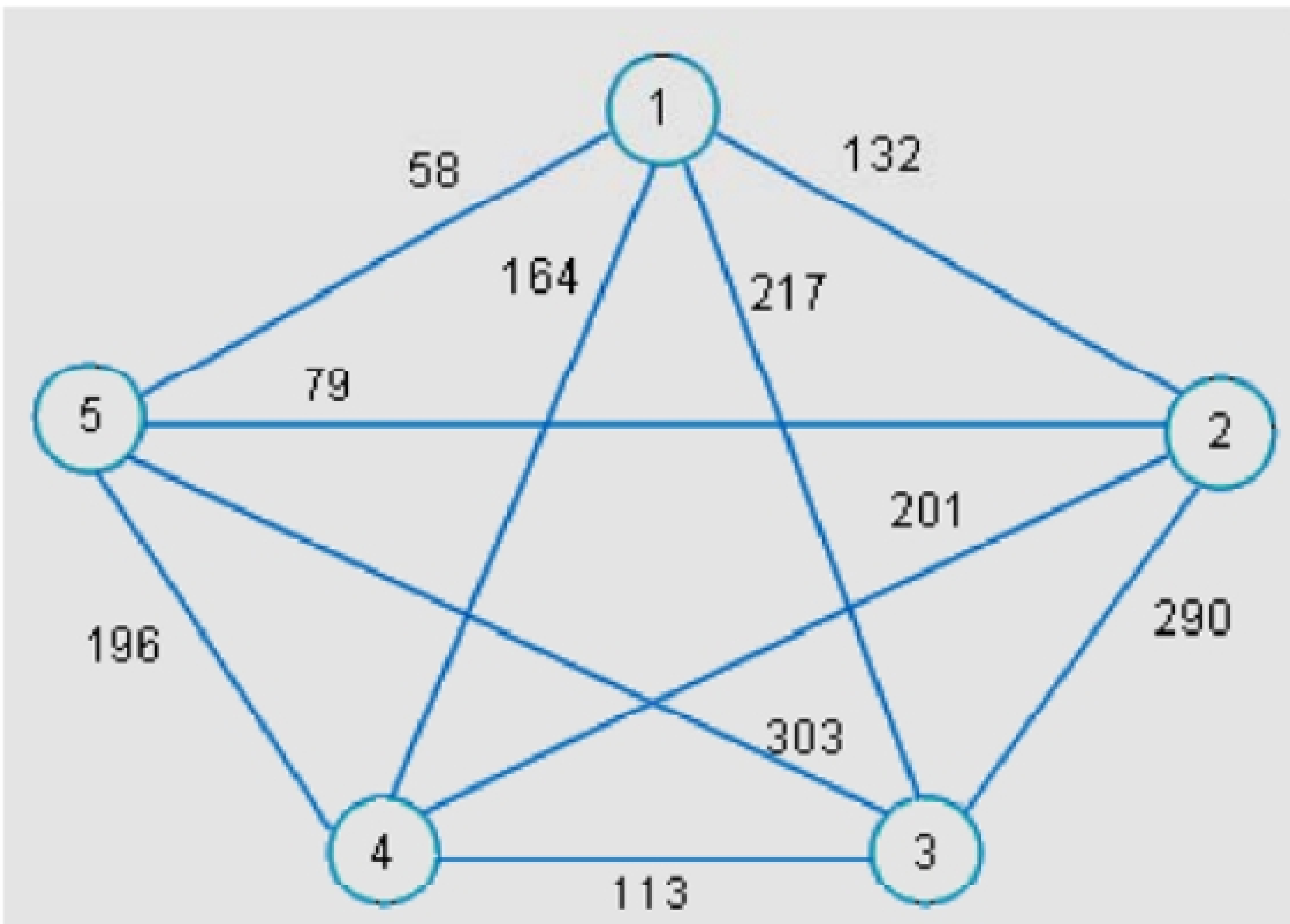
بحسب بيانات الجدول رقم (٥,٤) فإن دالة الهدف المطلوب تصغيرها وفقا لقيود المسألة المتناظرة سابقاً هي :

$$Z=\sum_{i}^{5}\sum_{j>i}^{5}c_{ij}x_{ij}=132x_{12}+217x_{13}+164x_{14}+58x_{15}+290x_{23}$$
$$+201x_{24}+79x_{25}+113x_{34}+303x_{35}+196x_{45}$$

ويعطي الشكل رقم (٥,١٠) عملية الربط الممكنة بين هذه المدن كما أسلفنا أعلاه فإن استخدام طريقة التفرع والحد في حل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم يعتمد على طبيعة المسألة التي نرغب بحلها. فقد اعتمدنا تحليلاً منطقياً سليماً عند حل مسألة حقيبة الظهر البسيطة أدى إلى إمكانية استخدام طريقة التفرع والحد للوصول إلى الحل الأمثل لهذه المسألة.

وفي مسألة البائع المتجول المتناظرة في المثال أعلاه فإنه يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن هذه المسألة تكافئ مسألة تخصيص واحد – لواحد (نذكر بأن مسألة التخصيص هي حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية) وذلك بأن نخصص لكل مدينة زيارة واحدة

فقط ولكل زيارة مدينة واحدة فقط شريطة ألا يحوي الحل الناتج على جولات جزئية (Sub tours). ولذا فإننا سنستفيد من الطريقة الهنغارية (Hungarian Algorithm) في حل مسائل التخصيص الناتجة وسنستخدم طريقة التفرع والحد لاستبعاد مسائل التخصيص الجزئية الناتجة والتي تحوي على جولات جزئية إلى أن نصل إلى أفضل مسألة تخصيص لا تحوي أي جولة جزئية فيكون حل هذه المسألة هو الحل الأمثل لمسألة البائع المتجول المتناظرة. ولمنع وجود جولات جزئية في مسائل التخصيص الجزئية الناتجة فإننا سنضع c_{ii}=M وذلك لمنع البائع المتواجد في مدينة من تخصيصه لزيارة تلك المدينة، كذلك سنضع $x_{ij}=0$ أو c_{ij}=M لضمان عدم احتواء الجولة على الضلع *(i,j)* وهو ما نواجهه عادة عند وجود جولات جزئية في المسألة الجزئية المتفرعة.



الشكل رقم (٥,١٠).

سنقوم الآن بتطبيق ما ورد أعلاه لحل مسألة البائع المتجول المتناظرة في المثال (٥,٥) السابق. وفقا للمصطلحات الأنفة الذكر سنقوم أولا بحل مسألة التخصيص

(سنسميها مج1) الممثلة في الجدول رقم (٥,٥) والذي نتج عن الجدول رقم (٥,٤) بعد استبدال c_{ii} ب M .

الجدول رقم (٥,٥).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	113	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

فنجد أن الحل الأمثل ل مج1 هو:

$$x_{21} = x_{15} = x_{34} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \quad Z = 495$$

ويمكننا بسهولة أن نلاحظ أن هذا الحل يحوي على الجولتين الجزئيتين التاليتين:

الجولة الجزئية الأولى هي $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

الجولة الجزئية الثانية هي $3 \rightarrow 4 \rightarrow 3$

فلا بد إذا من التخلص من كلا الجولتين. لنبدأ مثلا بالتخلص من الجولة الجزئية الثانية. فكما نوهنا أعلاه فإنه للتخلص من هذه الجولة الجزئية فإننا إما أن نضع $x_{34} = 0$ أو أن نضع $c_{34} = \text{M}$ وذلك لمنع ظهور أي من الضلعين (3,4) و (4,3) في الجولة. وسيستدعي منا ذلك إجراء عملية تفرع على مج1 إلى المسألتين الجزئيتين التاليتين:

مج2= مج1 + القيد ($x_{34} = 0$ أو $c_{34} = \text{M}$)

مج3= مج1 + القيد ($x_{43} = 0$ أو $c_{43} = \text{M}$)

نقوم الآن بحل إحدى المسألتين ولتكن مج 2 والمعطاة بياناتها كما في الجدول رقم (٥,٦) كمسألة تخصيص بالطريقة الهنغارية فنجد أن حلها الأمثل هو:

$$x_{14} = x_{25} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \qquad Z = 625$$

الجدول رقم (٥,٦).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	M	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

وكما نلاحظ فإن هذا الحل يحوي جولتان جزئيتان هما :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \quad \text{و} \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$$

ولذا لا يمكن أن يكون هذا الحل أمثليا. هنا نجري التفرع على مج2 لمحاولة التخلص من الجولة الجزئية $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ فنحصل على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج4= مج2 + القيد ($x_{25} = 0$ أو $c_{25} = \text{M}$)

مج3= مج2 + القيد ($x_{52} = 0$ أو $c_{52} = \text{M}$)

ونحل أحدهما بالطريقة الهنغارية، ولتكن مج4 والتي تصبح بياناتها كما في الجدول رقم (٥,٧)، فنحصل على الحل التالي :

$$x_{15} = x_{24} = x_{31} = x_{43} = x_{52} = 1 \qquad , \qquad Z = 668$$

وكما نلاحظ فإن هذا الحل لا يحوي جولات جزئية ولذا فهو حل ممكن، وهو يعطي الجولة الكاملة التالية :

$$1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

لذا فهو حل ممكن ولذا نعتبر أن هذا الحل مرشح لأن يكون حلا أمثليا. ولما كانت قيمة هذا الحل هي Z=668 ، ولما كان الهدف في المسألة هو التصغير، لذا ستكون القيمة Z=668 بمثابة *حداً أدنى* لقيمة أي حل مستقبلي ممكن. ويعني ذلك أنه يمكننا أن نشطب أي مسألة جزئية ممكنة يكون فيها $Z < 668$.

الجدول رقم (٥,٧).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	M
3	217	290	M	M	303
4	164	201	113	M	196
5	58	79	303	196	M

نعود الآن لحل مج5، والمعطاة بياناتها بالجدول رقم (٥,٨)، بالطريقة الهنغارية فنجد أن حلها الأمثل هو:

$$x_{14} = x_{43} = x_{32} = x_{25} = x_{51} = 1 \qquad , \qquad Z = 704$$

وهذا الحل هو حل ممكن لأنه يمثل جولة كاملة وخالية من الجولات الجزئية هي:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$$

ولكننا سنشطب هذا الحل؛ لأن قيمة Z=704 عنده أسوأ من قيمة سابقة Z=668 (ذلك أن المسألة هي مسألة تصغير). وبذلك تنتهي عملية التفرع على مج2، ولا بد لنا من العودة إلى المسألة الجزئية المتبقية مج3 ونجري عليها كافة عمليات التفرع الممكنة كما فعلنا بالنسبة ل مج2. فحسبما عرفنا مج3 أعلاه نجد أن بياناتها معطاة كما في الجدول رقم (٥,٨). فلو قمنا بحلها بالطريقة الهنغارية لوجدنا أن حلها الأمثل هو

$$x_{13} = x_{34} = x_{41} = x_{25} = x_{52} = 1 \qquad , \qquad Z = 652$$

وقيمة هذا الحل $Z=652$ أقل من قيمة ممكنة سابقة $Z=668$.

ولكن وبالنظر لأن هذا الحل يحوي على جولتين جزئيتين هما :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \quad \text{و} \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$$

لذا فإن إجراء عملية تفرع على مج3 هذه قد يوصل إلى حل (أو حلول) ممكن (حلول ممكنة) أفضل مما وصلنا إليه لغايته. الآن لو أجرينا عملية تفرع على مج3 لحصلنا على المسألتين الجزئيتين التاليتين :

مج6= مج3 + القيد ($x_{25}=0$ أو $c_{25}=\mathrm{M}$)

مج7= مج3 + القيد ($x_{52}=0$ أو $c_{52}=\mathrm{M}$)

وبطرق مماثلة نجد أن حل مج6 هو :

$$x_{15}=x_{34}=x_{23}=x_{41}=x_{52}=1 \qquad , \qquad Z=704$$

وهذا الحل هو حل ممكن ؛ لأنه لا يحوي جولات جزئية ، إلا أننا نشطبه لأن قيمته أسوأ من قيمة لحل ممكن سابق.

الجدول رقم (٥,٨).

رقم المدينة	1	2	3	4	5
1	M	132	217	164	58
2	132	M	290	201	79
3	217	290	M	113	303
4	164	201	M	M	196
5	58	79	303	196	M

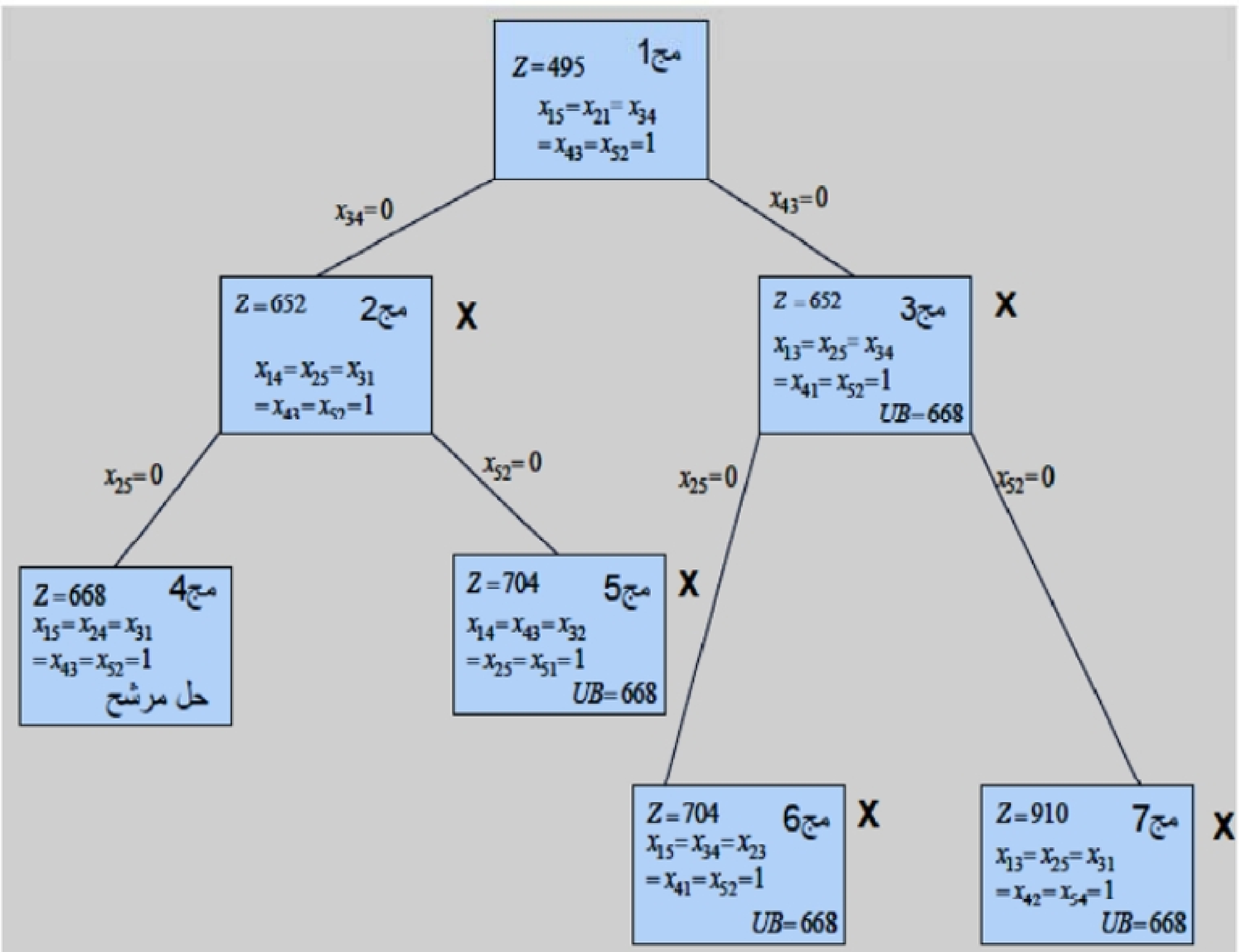
كذلك نجد أن حل مج7 هو :

$$x_{13}=x_{25}=x_{31}=x_{42}=x_{54}=1 \qquad , \qquad Z=910$$

وهذا الحل هو حل ممكن لأنه لا يحوي جولات جزئية، إلا أننا نشطبه لأن قيمته أسوأ من قيمة لحل ممكن سابق. الآن، ووفقا لما وجدناه أعلاه، يكون حل مج4 هو الحل الأمثل للمسألة وهو الجولة التالية:

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \quad \text{وقيمته } Z=668$$

ويعطي الشكل رقم (٥,١١) ملخصا وافيا لجميع عمليات التفرع التي قمنا بها لدى حل هذا المثال.



الشكل رقم (٥,١١).

(٥,٦) تمارين (٥)

١- يمتلك شخص حافلة حمولتها 50 طن يرغب أن يحملها بواحد أو أكثر من بين ثلاثة أنواع من الشاحنات من ميناء جدة إلى مدينة الرياض بحيث يحقق أكبر ربح ممكن. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,٩).

الجدول رقم (٥,٩).

رقم نوع الشاحنات	ربح الوحدة /ألف ريال	وزن الوحدة/طن
1	10	3
2	15	4
3	17	5

المطلوب صياغة هذه المسألة بنموذج رياضي وإيجاد الحل الأمثل لها.

٢- ترغب شركة باستثمار مبلغ 60 مليون في واحد أو أكثر من أربعة مشاريع متوافرة للاستثمار حالياً. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,١٠).

المطلوب صياغة المسألة وحلها في كل من الحالات التالية

(أ) لا يمكن الاستثمار في أي من المشاريع الأربعة إلا بعدد صحيح من الوحدات.

(ب) يمكن الاستثمار بأي من المشروعين (1) أو(3) بأجزاء من الوحدة.

(ج) لا يمكن الاستثمار بأكثر من 3 مشاريع من أصل المشاريع الأربعة المتوافرة.

الجدول رقم (٥,١٠).

رقم المشروع	الحد الأدنى (مليون) المطلوب للاستثمار/ وحدة	الربح المتوقع للوحدة/ مليون
1	3	2
2	5	4
3	2	3
4	4	5

٣– كبر الدالة :

$$Z = x_1 - 3x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 - x_2 \le 2$$

$$2x_1 + 4x_2 \le 15$$

$x_1, x_2 \ge 0$ أعداد صحيحة

المطلوب :

(أ) رسم فضاء الحل للمسألة المخففة ومن ثم إيجاد الحل الأمثل لها.

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

٤– لدينا المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

وفقا للقيود :

$$4x_1 - 4x_2 \le 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \le 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$

$x_1 \ge 0$ و عدد صحيح

$$x_2, x_3 \ge 0$$

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة التفرع والحد.

٥- ترغب سيدة أعمال باستثمار جزء من مالها الوفير وقد توافرت لها فرصتا استثمار. الأولى في أسهم لشركة اتصالات قيمة السهم فيها 70 $ والربح المتوقع للسهم هو 13 $. والثانية في سوق الأسهم العامة حيث يمكنها أن تستثمر أي مبلغ من المال وبنسبة مئوية متوقعة من الربح قدرها 9%. واعتماداً على تجربتها الناجحة في هذه الأخيرة فقد قررت هذه السيدة أن لا يتجاوز استثمارها في الأولى 40% من مجموع استثمارها في الفرصتين أو ألا يزيد عن 750 $. كما قررت هذه السيدة أن تستثمر مبلغاً كافياً من المال بحث لا تقل أرباحها في الفرصتين عن 250 $. إذا علمت أن السيدة تهدف أن يكون مجموع المال الذي ستستثمره في الفرصتين أقل ما يمكن فالمطلوب :

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية مختلطة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة التفرع والحد.

٦- أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية بطريقة التفرع والحد.

كبر الدالة :

$$Z = 3x_1 + 13x_2$$

وفقا للقيود:

$$2x_1 + 9x_2 \leq 40$$

$$11x_1 - 8x_2 \leq 82$$

$x_1 , x_2 \geq 0$ و أعداد صحيحة

٧- يقوم زوجان موظفان بتقاسم الواجبات المنزلية وهما يرغبان بجعل الزمن الكلي الذي يصرفانه في إنجاز كافة هذه الواجبات أقل ما يمكن. يعطي الجدول رقم (٥,١١) الأزمنة بالساعة لإنجاز هذه الواجبات.

الجدول رقم (٥,١١).

	التسوق	الطبخ	غسل الأواني	غسل الثياب
الزوج	3.2	7.4	4.1	2.5
الزوجة	3.9	6.8	4.5	2.7

المطلوب.

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة التفرع والحد.

٨- أوجد الحل الأمثل لمسألة البائع المتجول التالية بين خمس مدن بطريقة التفرع والحد. البيانات معطاة في الجدول رقم (٥,١٢).

الجدول رقم (٥,١٢).

المدن	A	B	C	D	E
A	0	65	69	66	57
B	64	0	24	92	22
C	49	50	0	31	45
D	48	45	55	0	50
E	59	34	30	34	0

٩- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 5x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 + 6.3x_2 + x_3 \leq 11$$

$$9x_1 + 6x_2 + 10x_3 \leq 28$$

$x_2 \geq 0$ و عدد صحيح

$$x_1, x_3 \geq 0$$

المطلوب :

(أ) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة بطريقة السمبلكس.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة التفرع والحد.

١٠- لديك المسألة التالية :

صغِر الدالة :

$$Z = -3x_1 + 4x_2$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 8$$

و أعداد صحيحة $x_1 \, , \, x_2 \geq 0$

المطلوب:

(أ) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة باستخدام طريقة السمبلكس ذات المرحلتين.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بطريقة التفرع والحد.

١١- تحقق أن الحل الأمثل للمسألة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + 3x_3 \leq 10$$

و أعداد صحيحة $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

هو $(2,2,2)$.

١٢- تقوم شركة بإنتاج إحدى السلع وقد وجد أن الطلب على هذه السلعة خلال الأشهر الخمسة القادمة هو كما في الجدول رقم (٥،١٣).

وقد توافرت لمسألة المخزون هذه كلا من المعلومات التالية. مستوى المخزون في بداية الفترة الأولى يساوي الصفر، تكاليف التجهيز للإنتاج تقدر ب 250$ لكل عملية إنتاج، أما تكلفة إنتاج الوحدة فتقدر ب 2$ وتكلفة تخزينها لنهاية الفترة فتقدر ب 1$.

الجدول رقم (٥,١٣).

الفترات	1	2	3	4	5
الطلب	220	280	360	140	270

تهدف الشركة إلى جعل تكاليف المخزون الكلية خلال الفترات الخمسة أقل ما يمكن. المطلوب صياغة المسألة بنموذج رياضي وحلها بطريقة التفرع والحد في كل من الحالات التالية:

(أ) إذا رمزنا بالرمز x_i لعدد الوحدات المنتجة في الشهر i و استخدمنا المتغير الثنائي القيمة التالي $y_i = 0$ إذا لم يكن هناك إنتاج في الشهر i، و $y_i = 1$ إذا كان هناك إنتاج في الشهر i.

(ب) المتغير y_i معرف كما في (أ) و المتغير الجديد x_{it} يعرف بأنه عدد الوحدات المنتجة في الشهر i لتغطية الاحتياج في الشهر t.

١٣– حول المسألة التالية إلى الصيغة النموذجية لمسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم ثم أوجد الحل الأمثل لها بطريقة التفرع والحد

كبر الدالة:

$$Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

وفقا للقيود:

$$20x_1 + 15x_2 - x_3 \leq 10$$

$$12x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 20$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ و أعداد ثنائية

الفصل السادس

طريقة التعداد الضمني
Implicit Enumeration Method

(٦,١) مقدمة

مع أن طريقة التفرع والحد هي الطريقة الأساسية لحل كافة أنواع مسائل البرمجة العددية، إلا أن حل "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" غالباً ما يكون باستخدام طريقة تسمى "طريقة التعداد الضمني (Implicit Enumeration Method). ونظراً لأن المتغيرات في "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" لا تأخذ إلا القيمتين 0 و1 فإن ذلك سيؤدي إلى عمليات تبسيط كبيرة في كل من عمليتي التفرع (Branching) والحد (Bounding) وسيقود ذلك إلى اكتشاف العقد (Nodes) التي تؤدي إلى حلول غير ممكنة وتلك التي لا تؤدي إلى الحل (الحلول) الأمثل (المثلى) مما يساعدنا على شطب هذه الحلول بسرعة كبيرة والإبقاء، في النهاية، على الحل الأمثل المنشود. ومع أن "طريقة التعداد الضمني" مصممة أساساً لحل "*مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم*" إلا أنه يمكننا القول بأن هذه الطريقة تصلح (ومن الناحية النظرية على الأقل) لحل أي مسألة برمجة عددية كما سنرى في الفقرة التالية.

(٦,٢) تحويل مسائل البرمجة العامة إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم

(٦,٢,١) تحويل مسائل البرمجة العددية إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم

كما رأينا في الفصل الثالث، الفقرة الرئيسة (٣,٢,٢) والفقرات الجزئية المتفرعة عنها، يمكننا تحويل أي "مسألة برمجة عددية" إلى "مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم".

كذلك يمكن التعبير عن المتغيرات أو الدوال المنفصلة بدلالة متغيرات ثنائية القيم. وبموجب ما رأيناه في الفصل الثالث أيضاً فإنه يمكن تحويل أي "مسألة برمجة غير خطية" إلى"مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم".

(٦,٢,٢) تحويل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم لكثيرات الحدود إلى مسائل برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

لو فرضنا أن لدينا مسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم العامة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = f(x_1, x_2, \qquad , x_n) \qquad (٦,١)$$

وفقا للقيود:

$$g_i(x_1, x_2, \qquad , x_n) \le b_i \ , i = 1,2,\ldots\ldots, m$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

حيث x_j متغيرات ثنائية القيم وحيث كل من f و g_i هي كثيرات حدود حدها العام k من الشكل $a_k \prod_{j=1}^{n_k} x_j^{p_{kj}}$ بحيث إن p_{kj} تمثل أساً غير سالب و a_k أمثال معلومة و n_k

عدد المتغيرات في هذا الحد العام. وكما نلاحظ فإن $x_j^{p_{kj}} = x_j$ لأن x_j متغير ثنائي القيمة. ولتحويل المسألة إلى برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم فإننا نستخدم التحويلات التالية:

التحويل (1): $a_k y_k = a_k \prod_{j=1}^{n_k} x_j$ ، وعندها فإن y_k هو متغير ثنائي القيمة.

ولضمان أن $y_k = 1$ عندما $x_j = 1$ لجميع قيم j و $y_k = 0$ عدا ذلك، نضيف التحويلين التاليين:

التحويل (2): $\sum_{j=1}^{n_k} x_j - (n_k - 1) \le y_k$

التحويل (3): $\frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k} x_j \ge y_k$

فإذا كان $x_j = 1$ لجميع قيم j عندئذ $\sum_{j=1}^{n_k} x_j = n_k$ وعندئذ من التحويل (2) يكون $1 \le y_k$ ومن التحويل (3) يكون $1 \ge y_k$ وبالتالي $1 = y_k$. أما إذا كان $x_j = 0$ لواحدة على الأقل من قيم j فإن التحويل (2) يقود إلى $-(n_k - 1) \le y_k$ والتحويل (3) يقود إلى $1 > y_k$ وبالتالي $y_k = 0$.

فيمكننا بشكل عام أن نحول مثل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم وسنوضح ذلك بالمثال التالي:

مثال (٦,١)

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_2 \qquad (٦,٢)$$

وفقا للقيود:

$$5x_1 + 9x_2^2 x_3 + 3x_1^2 x_3 \quad \le 15$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

الحل

نجـــري التحـــويلات التاليـــة $y_1 = x_1 x_2 x_3$ ، $y_2 = x_1 x_2$ ، $y_3 = x_2 x_3$ ، $y_4 = x_1 x_3$ فتصبح المسألة على الشكل التالي :

كبر الدالة :

$$Z = 2y_1 + y_2 \qquad (٦,٣)$$

وفقا للقيود :

$$5x_1 + 9y_3 \leq 15$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j - (3-1) \leq y_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 - 2 \leq y_1$$

$$\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} x_j \geq y_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 - 1 \leq y_2$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq y_2$$

$$x_2 + x_3 - 1 \leq y_3$$

$$\frac{1}{2}(x_2 + x_3) \geq y_3$$

$$x_1 + x_3 - 1 \leq y_4$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_3) \geq y_4$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3 \quad , y_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3,4$$

وهي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم.

(٦,٣) صيغة معتمدة لحل مسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم بطرق التعداد الضمني

نحتاج في بعض الخوارزميات المتعلقة بمسائل البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم لظهور المتغيرات الثنائية القيم بإشارة موجبة في دالة الهدف. ويمكننا تحقيق ذلك باستبدال المتغير الثنائي القيمة x_j الذي يظهر بإشارة سالبة في هذه الدالة بالمتغير $x'_j = 1 - x_j$. لاحظ هنا أن المتغيرات الجديدة x'_j تأخذ القيمتين 0 أو 1، فهي أيضا متغيرات ثنائية القيم. ولنوضح هذه الحالة بالمثال التالي.

مثال (٦,٢)

لدينا مسألة البرمجة الخطية العددية التالية:

صغر الدالة:

$$Z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 5 \qquad (٦,٤)$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, \cdots, 4$$

المطلوب تحويلها بحيث تظهر جميع المتغيرات في دالة الهدف بمعاملات موجبة.

الحل

نلاحظ أن المتغيرين x_1, x_4 فقط تظهر بمعاملات سالبة، لذا نستبدلهما بالمتغيرين $x_1' = 1 - x_1, x_4' = 1 - x_4$ على الترتيب ثم نعوض عنهما حيثما وردا فنحصل على المسألة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = 2x_1' + 3x_2 + x_3 + x_4' - 3 \qquad (٦,٥)$$

وفقا للقيود:

$$-x_1' + 2x_2 - 3x_3 - x_4' \geq 5$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 2, 3$$

$$x_j' = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1, 4$$

حيث نلاحظ تحقق المطلوب.

كذلك قد نحتاج إلى جعل القيود من الشكل $\leq$ على الشكل $\geq$ ، ويمكننا ذلك بأن نضرب طرفي أي قيد من الشكل $\leq$ بالعدد -1. فمثلاً القيد $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 \geq 5$ يكافئ القيد $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq -5$. كذلك فإن أي قيد على الشكل = يتم استبداله بقيدين أحدهما من الشكل $\leq$ والأخر من الشكل $\geq$ ثم نحول هذا الأخير إلى الشكل $\leq$.

وبذلك يمكننا أن نفترض أنه يمكن أن نكتب أي مسألة برمجة خطية عددية ذات متغيرات ثنائية القيم بالصيغة العامة التالية:

صغر الدالة:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (٦,٦)$$

وفقا للقيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \ i = 1,2,..........,m$$

لجميع قيم j ; $x_j = 1$ أو 0. يمكننا هنا أن نفترض أيضاً أن

$$0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 .... \le c_n$$

حيث يمكننا تحقيق ذلك بأن نعيد ترتيب الحدود في دالة الهدف حتى نضمن تحقق المتراجعات $0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 .... \le c_n$. فعلى سبيل المثال فإن نموذج المثال (٦,١) يكافئ النموذج التالي:

صغر الدالة:

$$Z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3 \qquad (٦,٧)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \le -5$$

$$x_j = 1 \ \text{أو} \ 0, \quad j = 1,2,3,4$$

فيما تبقى من هذه الفقرة سنلقي الضوء على مضمون طريقة التعداد الضمني ونعطي أيضاً بعض التعاريف التي سيتم استخدامها في هذه الطريقة.

١- عدد الحلول الممكنة

لنفرض أن عدد متغيرات القرار هو n فبالنظر إلى خصوصية متغيرات القرار من أنها لا تأخذ إلا القيمتين 0 أو 1 فإن عدد الحلول الممكنة يساوي 2^n.

فمثلاً عدد الحلول الممكنة للنموذج أعلاه يساوي $2^4 = 16$ حلاً ممكناً.

وتقوم طريقة التعداد الضمني بعملية مسح كاملة لكافة الحلول الممكنة لكنها لا تقوم بالتعامل إلا مع عدد قليل جداً من هذه الحلول وذلك من خلال إسقاط ضمني للحلول الجزئية أو الكاملة التي تقود لحلول غير ممكنة أو إسقاط الحلول الممكنة التي تعطي قيمة أسوأ لدالة الهدف.

٢- الحلول الجزئية والحلول الكاملة والمتغيرات الحرة

الحل الجزئي (Partial Solution) هو حل من الشكل $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)$ حيث x_k هي متغيرات ثنائية القيم أعطيت مسبقاً إحدى القيمتين 0 و1 وحيث $k=1,2,\ldots\ldots,n$.

ويصبح أي حل جزئي حلا كاملا (Complete Solution) عندما تصبح $k=n$.

وعندما تكون $k<n$ فإننا نسمي المتغيرات $x_{K+1},\ldots\ldots,x_n$ متغيرات حرة (Free Variables)، ونقول عن باقي المتغيرات (والتي أعطيت مسبقا إحدى القيمتين 0 أو 1) بأنها متغيرات ُمثبتة(Fixed Variables).

فلو أخذنا مثلاً النموذج الأخير (٦,٥) حيث n=4 فإن الحل التالي

(أ) (0,0,1) هو حل جزئي وهنا يكون x_4 متغيراً حراً.

وكذلك فإن

(ب) (1,0)

(ج) (0,1)

هي حلول جزئية فيها x_3, x_4 هي متغيرات حرة.

والحلول (0,0,1,0)، (0,0,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (أ). والحلول (1,0,0,0)، (1,0,0,1)، (1,0,1,0)، (1,0,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (ب). والحلول (0,1,0,0)، (0,1,0,1)، (0,1,1,0)، (0,1,1,1) هي حلول كاملة للحل الجزئي (ج).

وفي الحقيقة فإننا لن نستفيد كثيرا إذا استكملنا كافة الحلول الجزئية أو معظمها ؛ لأن ذلك يعني أننا قمنا باستعراض وفحص لكافة هذه الحلول. ولكن وكما نوهنا أعلاه، فإن طرق الحل لمسائل البرمجة العددية تُجري الحسابات على عدد قليل جداً من مجموعة الحلول الممكنة وذلك ضمن آلية معينة يسقط بموجبها العدد الأكبر من هذه الحلول بطريقة ضمنية (وسنشير لمثل هذه الحلول بأنها غير واعدة Non promising). وسنوضح ذلك فيما يلي.

٣- آلية إسقاط الحلول غير الواعدة

لنأخذ المثال البسيط التالي :

مثال (٦,٣):

صغر الدالة :

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad (٦,٨)$$

وفقا للقيود :

$$3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \le -6$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0, \quad j = 1,2,3$$

إن عدد الحلول الممكنة لهذه المسألة هو $2^3 = 8$.فلو أخذنا القيد الوحيد لها $3x_1 - 8x_2 + 5x_3 \le -6$ وفحصنا هذا القيد فحصاً جيدا نجد أنه لا يمكن لأي من المتغيرين x_1, x_3 أن يأخذ القيمة 1 ، إ ذ أن ذلك سيؤدي إلى عدم تحقق هذا القيد. ولنفس السبب لا يمكن ل x_2 أن يأخذ القيمة 0 . إذاً فالحل الوحيد الممكن هو (0,1,0). وبذلك نكون قد أسقطنا سبعة حلول(غير واعدة) بشكل ضمني هي (1,1,1)، (1,1,0)، (0,1,1)، (0,0,0)، (1,0,0)، (0,1,0)، (0,0,1) وذلك دون أن نفحص أياً من هذه

الحلول. وفيما يخص الحلول الجزئية، فبما أننا استنتجنا من قيد المسألة أنه لا يمكن لأي من المتغيرين x_1, x_3 أن يأخذ القيمة 1 لذا فإننا نشطب أي حل جزئي يكون فيه x_1 أو x_3 أو كلاهما مساويا 1 . وكذلك فإننا نشطب أي حل جزئي يكون فيه x_2 =0 .

في الفقرة التالية سنوضح طريقة التعداد الضمني لحل مسائل البرمجة الخطية العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم باستخدام خوارزمية خاصة لهذا النوع من المسائل تسمى "الخوارزمية الجمعية".

(٦,٤) الخوارزمية الجمعية
The Additive Algorithm

سميت هذه الخوارزمية بالجمعية (Additive) ؛ لأنها لا تستخدم إلا عمليتي الجمع والطرح. ومع أنه طرأت بعض التعديلات على هذه الخوارزمية إلا أنها تعزى أساساً إلى بالاس (Balas). تستند الفكرة في هذه الخوارزمية على حل الصيغة المخففة للمسألة العامة أعلاه. فبإضافة المتغيرات الراكدة (Slack Variables) تصبح المسألة على الشكل التالي :

صغر الدالة :

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (٦,٩)$$

وفقا للقيود :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad ; \; i = 1,2,..........,l$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,..........,n$$

$$S_i \geq o \; : \; i = 1,2,..........,l$$

وتقوم فكرة الحل على ما يلي.

بما أنه أمكن جعل أمثال هذه المتغيرات في دالة الهدف غير سالبة، فإنه يبدو لنا منطقيا أن نسعى لإعطاء أكبر عدد من هذه المتغيرات القيمة 0؛ لأن ذلك سيؤدي إلى تصغير دالة الهدف Z . لذا نعطي أولاً جميع المتغيرات القيمة 0 ونفحص الحل الناتج، فإذا كان هذا الحل ممكناً (أي $S_i \geq o$ لجميع قيم i) فإنه حل أمثل. أما إذا كان غير ممكن (أي أنه أدى إلى عدم تحقق بعض قيود هذه المسألة ويكافئ ذلك أن بعض قيم المتغيرات الراكدة S_i سالبة $S_i < o$) فإننا نرفع (Elevate) قيمة متغير أو أكثر إلى القيمة 1 شريطة أن يؤدي هذا الرفع إلى حل أو حلول ممكنة. وهكذا فإننا ننتقل وبالتدريج إلى المتغيرات التالية إلى أن نصل إلى الحل الأمثل. والسؤال الآن هو:

(أ) أي من المتغيرات علينا اختيارها ورفعها إلى القيمة 1.

(ب) متى نصل إلى الحل الأمثل.

وقد تم تصميم عدد من الاختبارات للإجابة على هذين السؤالين الرئيسين. وسنقوم فيما يلي بتقديم هذه الاختبارات من خلال حل المثال التالي:

مثال (٦,٤)

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8 \tag{٦,١٠}$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \leq 1$$

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 \leq -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 \leq -1$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,3,4,5$$

الحل

بكتابة دالة الهدف كأحد القيود أي $Z - 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -8$ وإضافة المتغيرات الراكدة $S_i ; i=1,2,3$ إلى كل من القيود ودالة الهدف نجد أن جدول الحل الابتدائي للمسألة الناتجة كبرنامج خطي يعطى كما في الجدول رقم (٦،١). وكما نلاحظ فإن جميع الأمثال للمتغيرات غير الأساسية في سطر دالة الهدف سالبة الأمر الذي يدل على أن الحل المعطى في الجدول رقم (٦،١) هو حل أمثل. لكن هذا الحل غير ممكن لأن قيم المتغيرات الأساسية فيه سالبة. نسمي مثل هذا الحل عادة باسم "*حل ثنوي ممكن*" (Dual Feasible Solution). وعند أخذ المسألة المخففة لمسألة البرمجة العددية ذات المتغيرات الثنائية القيم فيجب أن تبدأ الخوارزمية الجمعية ب "حل ثنوي ممكن" (راجع طريقة السمبلكس الثنوية في الفصل الأول). سنكتب الحل الابتدائي (غير الممكن) أعلاه على شكل متجه كما يلي :

$(S_1 \;, S_2 \;, S_3)_0 = (1, -2, -1)$ وقيمته $Z_0 = -8$ وسنسميه الحل(0)

حيث يشير الدليل 0 إلى الحل الابتدائي. وكما نلاحظ فإن شرط الأمثلية محقق في سطر دالة الهدف لهذه المسألة – كمسألة تصغير- (راجع هذا الشرط في الفصل الأول) ولكن الحل الحالي غير ممكن. إذاً يمكننا استخدام " طريقة السمبلكس الثنوية " لغاية الوصول إلى حل ممكن. ولكن وبالنظر إلى خصوصية المسألة من أن متغيراتها لا تأخذ إلا القيمتين 0 و1 فيمكننا أن نتجنب العمليات الطويلة لطريقة السمبلكس الثنوية وتحسين الحل الحالي من خلال عملية رفع قيمة أحد المتغيرات $x_j \; ; j = 1,2,3,4,5$ إلى القيمة 1 شريطة أن تقود هذه العملية للاقتراب من حل ممكن.

الجدول رقم (٦,١).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	S_3	الطرف الأيمن
Z	-3	-2	-5	-2	-3	0	0	0	-8
S_1	-1	-1	1	2	-1	1	0	0	1
S_2	-7	0	3	-4	-3	0	1	0	-2
S_3	11	-6	0	-3	-3	0	0	1	-1

فالسؤال إذاً: أي المتغيرات يحقق لنا ما نريد؟ أو بشكل مكافئ: أي المتغيرات يجب أن نتجنب رفعه لتجنب ما لا نريد؟

وللإجابة: لوعدنا للقيدين الثاني والثالث التي يأخذ فيها اثنين من المتغيرات الأساسية قيماً سالبة نجد أن x_3 هو الوحيد الذي يملك أمثالاً غير سالبة في القيدين معاً ولذا فإن رفع x_3 إلى القيمة 1(مع إبقاء بقية المتغيرات على القيمة 0) سيزيد الوضع سوءاً إذ سيزيد ذلك في سلبية قيم المتغيرين الأساسين S_3, S_2 مع أننا نسعى لإنقاصهما. ولذا علينا إبقاء قيمة x_3 مساوية 0 . وبطريقة مماثلة نجد أن رفع أي من المتغيرات x_4 ، x_2 ، x_1 إلى القيمة 1 لن يحقق لنا ما نريد. ولكن رفع x_5 إلى القيمة 1 (مع إبقاء بقية المتغيرات عند القيم 0) سيقود إلى حل ممكن هو:

$(S_1 \ , S_2 \ , S_3)_1 = (2,1,2)$ وقيمته $Z_1 = -5$ الحل (1)

وهنا فإننا نعتبر هذا الحل الممكن بأنه أول حل ممكن قد تم الحصول عليه، ولذا نقوم بتخزينه، ونعتبر القيمة $Z_1 = -5$ حداً أعلى(لأن المسألة مسألة تصغير) لأي حل مستقبلي ممكن. وسيمكننا ذلك من أمرين:

الأول: رفض أي حل مستقبلي ممكن تكون فيه قيمة دالة الهدف أكبر من أو تساوي 5-.

والثاني: أن عملية التفرع من القيمة 1= x_5 ستكون غير مجدية لأنها لن تؤدي لقيمة أفضل لدالة الهدف وذلك لأن الهدف تصغير ولأن جميع معاملات المتغيرات في هذه الدالة موجبة. ولذا فإن عملية التفرع ستكون من القيمة 0 = x_5 إن كانت مثل هذه العملية مجدية.

فلو اعتبرنا $x_5 = 0$ وتذكرنا أن بقية المتغيرات $x_j \;;\; j=1,2,3,4$ هي أصفار لحصلنا على الحل التالي :

$$(S_1\ ,\ S_2\ \ ,S_3)_2 = (1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_2 = -8 \qquad \text{الحل } (2)$$

لاحظ أن الحل (2) يتطابق ظاهرياً مع الحل(0)، ولكن وفي الحقيقة ثمة فرق جوهري مهم بينهما هو أن جميع المتغيرات $x_j \;;\; j=1,2,3,4,5$ في الحل (0) هي "*متغيرات حرة*" ويمكنها أخذ أحد القيمتين 0 أو 1 ، في حين أنه في الحل (2) فإننا *ثبتنا* المتغير x_5 إلى القيمة 0 (أي $x_5 = 0$)، الأمر الذي يعني أن عملية التفرع ستكون على أحد المتغيرات (الحرة) الباقية $x_j \;;\; j=1,2,3,4$.

ولكن ثمة معلومة إضافية متوافرة لغاية الآن هي أن هناك حداً أعلى قيمته Z=-5 على القيمة المثلى لدالة الهدف لجميع الحلول التي ترتفع فيها قيمة أحد المتغيرات الحرة الأربعة المتبقية $x_j \;;\; j=1,2,3,4$ إلى الواحد.

الآن: لما كانت أمثال x_5 وأمثال x_1 متساوية (=3) فإن رفع قيمة x_1 إلى القيمة 0 لن يحسن في قيمة الحد الأعلى لدالة الهدف (Z=-5). كذلك فقد أشرنا من قبل بأن رفع قيمة x_3 إلى القيمة 1 سيؤول إلى بعد الحل الناتج عن أن يكون ممكناً. لذا فإن الفرص المتبقية أمامنا هي أن نرفع أي من المتغيرين المتبقيين x_2 أو x_4 إلى القيمة 0 . ولو تفحصنا قيود النموذج (٦,١٠) لوجدنا أن عملية رفع أي منهما لوحده لا تقود إلى حل ممكن (واحد أو أكثر من المتغيرات يأخذ قيمة سالبة). والسؤال الآن أي من مثل هذه المتغيرات أكثر تسارعاً في الوصول إلى حل ممكن؟.

للإجابة نعرف المقدار التالي لأي متغير حر x_j :

$$v_j = \sum_{all\ i} Min\{0, S_i - a_{ij}\} \qquad (٦,١١)$$

في الحقيقة فإن المقدار المعرف بالعلاقة (٦،١١) يمكن أن يمثل ما يمكن أن نسميه "مقدار البعد عن أن يكون الحل الناتج ممكناً لدى رفع المتغير x_j إلى 1" ولذا فإننا "نختار المتغير x_j الذي يملك أقل القيم (المطلقة) الناتجة ل v_j ".

ففي مثالنا حيث المتغيرات الحرة هي x_2 و x_4 نجد أن

$$v_2 = \sum_{all\ i} Min\{0, S_i - a_{i2}\} = Min\{0, S_1 - a_{12}\} + Min\{0, S_2 - a_{22}\} + Min\{,0, S_3 - a_{32}\}$$
$$= Min\{0, 1+1\} + Min\{0, -2-0\} + Min\{0, -1+6\} = 0 + (-2) + 0 = -2$$

وبالمثل نجد أن $v_4 = (1-2) + 0 + 0 = -1$

وبذلك علينا أن نفرع على المتغير x_4. لنرفع x_4 إلى القيمة 1 أولاً فنجد أن ذلك يقود إلى الحل

$(S_1 , S_2 , S_3)_3 = (-1, 2, 2)$ وقيمته $Z_3 = -6$ الحل(3)

والحل (3) غير ممكن وفيه x_1 , x_2 , x_3 هي المتغيرات الحرة في هذا الحل (حيث تم تثبيت المتغيرات x_4 , x_5 إلى القيمتين 0 و 1 على الترتيب) فأي منها مرشح لرفعه إلى القيمة 1. ولكن وبالعودة إلى أمثال المتغيرات x_1 , x_2 , x_3 ، وهي 5 , 2 , 3 على الترتيب، نجد أن رفع x_1 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z=-3 ، ورفع x_2 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z=-4 ، ورفع x_3 إلى القيمة 1 يعطي القيمة Z= -1 . وكما نلاحظ فجميع قيم الدالة Z الناتجة أسوأ من قيمة الحد الأعلى Z=-5 الذي وصلنا إليه عند الحل (1) الممكن، لذا فإننا نستثني هذه المتغيرات الحرة من عمليات التفرع المحتملة.

نعود الآن ونفترض أن $x_4 = 0$ (مثبت) ولدينا مسبقا $x_5 = 0$ (مثبت) فتكون x_1 , x_2 , x_3 هي المتغيرات حرة، فلو رفع x_1 إلى القيمة 1 لحصلنا على القيمة Z=-5 . ولو رفعنا x_2 إلى القيمة 1 لحصلنا على القيمة Z=-6 لكن الحل الناتج غير ممكن.

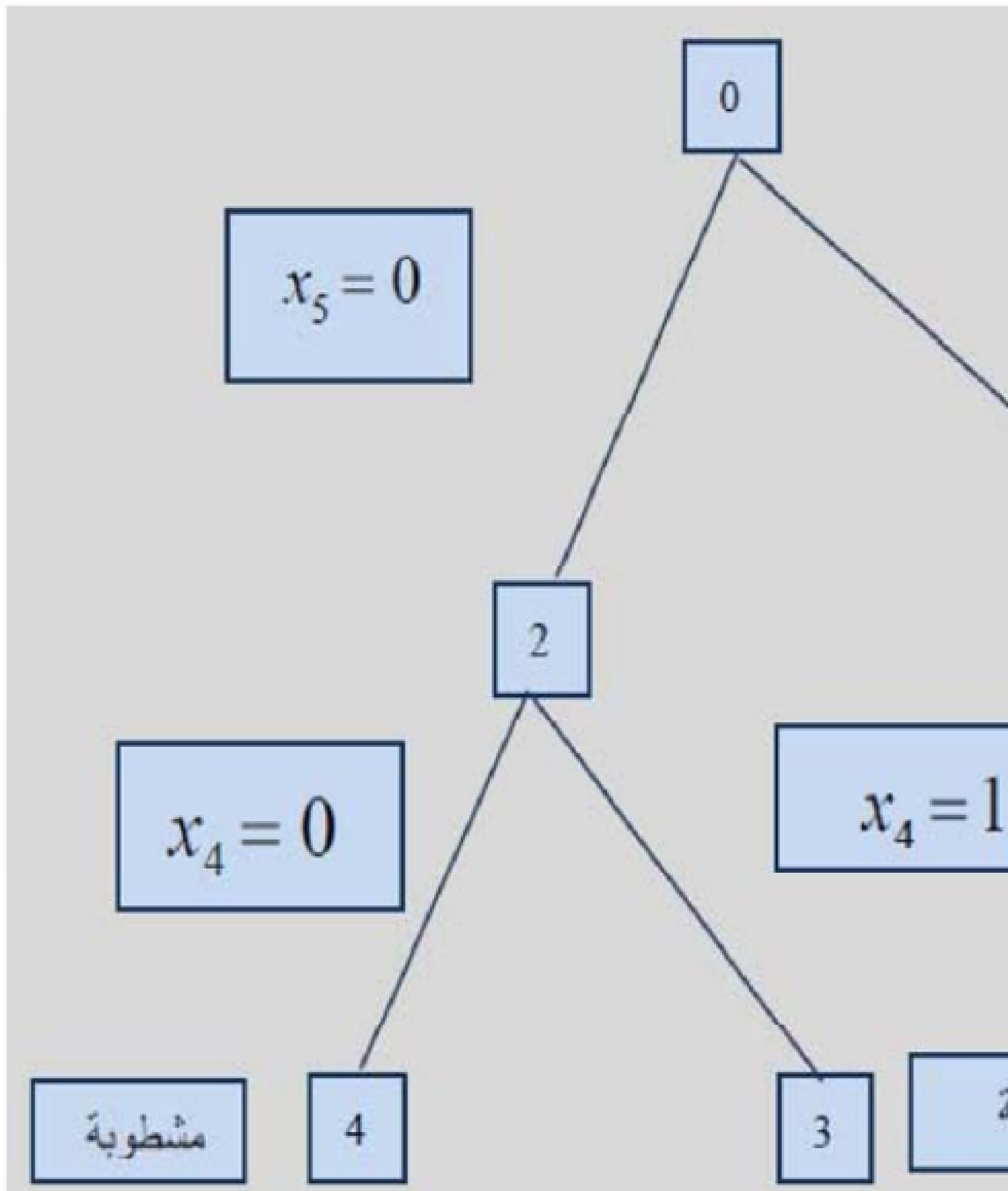
...صلنا على القيمة 3- =Z والحل الناتج غير ممكن كذلك.

... القيمة 0 لحصلنا على حل يطابق الحل الابتدائي (0)

...ن قد أنهينا جميع عمليات التفرع الممكنة والحل الأمثل

$$x_1 = 0 \ , x_2 = 0 \ \ , x_3 = 0 \ , x_4 = 0 , x_5 ...$$

... التي أجريناها سابقاً بالشكل رقم (٦،١).



...٦،...). ملخص عمليات التفرع لمثال (٦،٥).

إن عدد الحلول الممكنة في مثا...

من الشكل رقم (٦،١) – فقد...

الباقي باعتبارها حلولاً غير و...

بدأنا الحل بعملية تفرع ...

الحسابات ل $16 = 2^{5-1}$ حلاً، ...

قيمتين هما $x_4 = 1$ و $x_4 = 0$ ...

يكون مجموع الحلول التي أ...

حسابات كاملة على خمس فق...

الحل (4)) وتم استبعاد أو إسقا...

ملاحظة (٦،١)

(أ) عرفنا أعلاه كل م...

عرفنا الحلول الجزئية بأنها تلك...

من المتغيرات.

وفي شكل كالشكل رق...

من x_4 , x_5) فإن كلاً م...

ذلك إلى تسمية المتغير بأنه "ح...

هذه العقدة. كذلك نسمي الح...

القيمتين 0 أو1 .

(ب) لتجنب التعقيد ف...

القيم عند كل عقدة J_m (...

+j(-j)

إن عدد الحلول الممكنة في مثال (٦،٥) السابق هو $2^5 = 32$ حلاً، لكننا – وكما نلاحظ من الشكل رقم (٦،١) – فقد أجرينا حسابات كاملة لعدد قليل جداً منها وتم إسقاط الباقي باعتبارها حلولاً غير واعدة. فلو تفحصنا ما قمنا بعمله فعلياً لوجدنا الآتي.

بدأنا الحل بعملية تفرع على المتغير x_5. ففي الفرع الأول حيث ثبتنا $x_5 = 1$ تمت الحسابات ل $2^{5-1} = 16$ حلاً، وفي الفرع الثاني حيث ثبتنا $x_5 = 0$ فقد فرعنا x_4 إلى أحد قيمتين هما $x_4 = 1$ و $x_4 = 0$ و في كلٍ منهما فقد تمت الحسابات ل $2^{5-2} = 8$ حلاً. وبذلك يكون مجموع الحلول التي أخذها بعين الاعتبار مساوياً 16+8+8 =32 حلاً وقد أجرينا حسابات كاملة على خمس فقط منها (هي الحل (0)، الحل (1)، الحل (2)، الحل (3)، الحل (4)) وتم استبعاد أو إسقاط الباقي بشكل ضمني لأنها حلول غير واعدة.

ملاحظة (٦،١)

(أ) عرفنا أعلاه كل من المتغيرات الحرة بأنها المتغيرات التي لم يتم تثبيتها كما عرفنا الحلول الجزئية بأنها تلك التي نثبت فيها k من أصل n (k اقل من أو تساوي n) من المتغيرات.

وفي شكل كالشكل رقم (٦،١) فقد ذكرنا أنه في العقدة (3) مثلاً (حيث ثبتنا كل من x_4 , x_5) فإن كلاً من المتغيرات x_1 , x_2 , x_3 هي متغيرات حرة. ويقودنا ذلك إلى تسمية المتغير بأنه "حر عند عقدة معينة" إذا لم يتم تثبيته في أي فرع يقود إلى هذه العقدة. كذلك نسمي الحل بأنه "جزئي" إذا تم تثبيت قيمة متغير أو أكثر إلى إحدى القيمتين 0 أو 1 .

(ب) لتجنب التعقيد في الكتابة فإننا سنستخدم الترميز التالي للمتغيرات الثنائية القيم عند كل عقدة J_m ($m = 0,1,2,........$) (أو حل جزئي) .

$+j(-j)$ من أجل القيم $x_j = 1$ ($x_j = 0$) (٦،١٢)

مع اعتبار أن $J_0=\phi$ دوماً والتي تعني أن جميع المتغيرات حرة في الحل الابتدائي (العقدة(0)). فلو طبقنا هذا الترميز على عقد الشكل رقم (٦،١) لكان لدينا النتائج التالية :

$$J_1=\{5\} \quad ، \quad J_2=\{-5\} \quad ، \quad J_3=\{-5,4\} \quad ، \quad J_4=\{-5,-4\}$$

(ج) لقد استخدمنا كلمة مشطوبة (omedFath) بجوار بعض العقد (الحلول الجزئية) في الشكل رقم (٦،١). وقد كنا نفعل ذلك في إحدى حالتين :

١– إذا لم يكن بإمكان تلك العقدة (الحل الجزئي) أن تقود إلى قيمة أفضل لدالة الهدف.

٢– إذا لم يكن بإمكان تلك العقدة (الحل الجزئي) أن تقود إلى حل ممكن.

(د) سنرمز بالرمز Z_m لقيمة دالة الهدف في أي عقدة J_m $(m=0,1,2,...)$ وسنرمز بالرمز Z^u للحد الأعلى الحالي لقيمة Z وسنعتبر أن $Z^u=\infty$ عند العقدة J_0.

(هـ) لوعدنا إلى العقدتين $J_3=\{-5,4\}$ و $J_4=\{-5,-4\}$ في مثالنا أعلاه نجد أنه بعد شطب العقدة (3) فقد انتقلنا إلى العقدة (4). وقد حصلنا على العقدة (4) بعملية استكمال لقيم أقصى متغير على اليمين (وهو x_4) من العقدة (3). ففي $J_3=\{-5,4\}$ فإن أقصى متغير على اليمين هو x_4 وقد أخذ القيمة 1 في هذه العقدة. وعند الانتقال للعقدة التالية J_4 فإننا نستكمل قيم x_4 بإعطائه القيمة 0 فنحصل على العقدة $J_4=\{-5,-4\}$. وقد قمنا بشطب هذه الأخيرة واعتبرنا عملية التعداد لكافة الحلول قد انتهت عند J_4 . والسبب في ذلك هو أن القيم السالبة في $J_4=\{-5,-4\}$ تعني أن كافة المتغيرات قد مرت بالقيمتين 1 أولاً ثم 0 ثانياً .

وسنعتمد جميع المصطلحات في هذه الملاحظة في كل مما يأتي.

الخوارزمية الجمعية

سنقدم، فيما تبقى من هذه الفقرة، ما أطلقنا عليه اسم "الخوارزمية الجمعية"، ولكن باستخدام الترميز (٦,١٢)، لحل النموذج العام (٦,٩) لمسائل البرمجة العددية الثنائية. وسنطبق خطوات هذه الخوارزمية لإعادة حل المثال (٦,٥) السابق والذي نعيد كتابته ثانية ولكن بصيغة النموذج العام (٦,٩).

(٦,١٥) صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 - 8$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 + S_1 = 1$$

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + S_2 = -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 + S_3 = -1$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,3,4,5$$

$$S_i \geq 0, i = 1,2,3$$

تعتمد هذه الخوارزمية على خطوتين رئيستين يمكن لأي منهما أن يتألف من عدد من التكرارات.

خطوة (1)

ابدأ من العقدة $J_0 = \phi$ حيث $Z^u = \infty$ وطبق الاختبارات الأربعة التالية على المتغيرات الحرة (نذكر بأن جميع المتغيرات تكون حرة في العقدة J_0).

اختبار (1). لأي متغير حر x_j في العقدة J_m ، إذا كان $a_{ij} \geq 0$ لجميع قيم i التي يكون من أجلها $S_i^m < 0$ فلا يمكن لهذا المتغير الحر أن يقود إلى حل ممكن ونعتبره عندها " متغير غير واعد " وعليه يتم إسقاطه من الاعتبار

اختبار (2). لأي متغير حر x_j في العقدة J_m إذا كان.

$$c_j + Z_m \geq Z^u \qquad (٦,١٣)$$

فلا يمكن لهذا المتغير الحر أن يقود حل أفضل من الحل الحالي وبالتالي فهو "متغير غير واعد" وعليه يتم إسقاطه من الاعتبار. لاحظ أن هذا الاختبار لا يطبق في العقدة J_0 .

اختبـــار (3). لو كان $S_i^m < 0$ ولو أخذنا القيد المقابل وفرضنا أن F_m هي مجموعة المتغيرات الحرة التي لم يتم إسقاطها بالاختبارين(1) و(2) فلا يمكن لأي من المتغيرات الحرة في هذه المجموعة أن يقود إلى حل ممكن إذا تحقق الشرط التالي

من أجل واحدة على الأقل من $S_i^m < 0$ فإن $\sum_{x_j \in F_m} Min\{0, a_{ij}\} > S_i^m$ (٦,١٤)

وعليه يتم إسقاط جميع المتغيرات في F_m وعندها نقوم بشطب العقدة المقابلة J_m .

اختبار (4). إذا كانت F_m غير خالية وعرفنا

$$v_j^m = \sum_{i=1}^{l} Min\{0, S_i^m - a_{ij}\} \qquad (٦,١٥)$$

حيث l هي عدد القيود ، وكان

$$v_k^m = Max_{j \in F_m} \{v_j^m\} \qquad (٦,١٦)$$

عندئذ يتم اختيار المتغير الحر x_k . فإذا كان $v_k^m = 0$ فإن $x_k = 1$ مع متغيرات العقدة المقابلة J_m تنتج حلاً ممكناً محسناً ، وعندها نشطب العقدة التالية J_{m+1} والتي تنتج باستكمال قيم المتغير x_k في أقصى اليمين للعقدة J_m . أما إذا كان $v_k^m \neq 0$ فإننا

نعيد تطبيق الاختبار(4) على العقدة J_{m+1} حتى تصبح جميع عناصر العقدة المشطوبة سالبة.

خطوة (2).

نتوقف إذا وصلنا إلى عقدة J_m جميع عناصرها سالبة وعندها يكون أفضل الحلول الممكنة التي وصلنا إليها هو الحل الأمثل المنشود وإلا فإننا نكرر الخطوة (1).

فيما يلي سنطبق الخوارزمية الجمعية لإعادة حل المثال (٦,٥)

خطوة (1).

التكرار(0): نبدأ بوضع $J_0 = \phi$ حيث $Z^u = \infty$ ونطبق الاختبار (1) في العقدة $J_0 = \phi$ والتي تعني أن جميع المتغيرات حرة وقيمتها • فنحصل على الحل (0) التالي

$$(S_1^0 \ , S_2^0 \ , S_3^0) = (1, -2, -1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_0 = -8$$

وهنا لدينا $S_2^0 < 0$ و $S_3^0 < 0$ فهذا الحل غير ممكن. وبالعودة إلى البيانات في النموذج (٦,١٣) نجد أن ما يلي:

للمتغير x_2 : $a_{12} = -1 < 0 \ , a_{22} = 0$

وللمتغير x_3 : $a_{13} = 1 > 0 \ , a_{23} = 3 > 0, \ a_{23} = 0 \geq 0$

فشرط الاختبار (1) غير محقق للمتغير x_2 ولكنه محقق للمتغير x_3 ، لذا علينا إسقاط المتغير x_3 .

نطبق الاختبار (3) في العقدة J_0 حيث أسقطنا المتغير x_3 في الاختبار (1) وبذلك فإن $F_0 = \{1,2,4,5\}$. هنا لدينا $S_2^0 < 0$ و $S_3^0 < 0$ ، ولذا علينا أخذ القيدين المقابلين من النموذج وهما:

$$-7x_1 + 0.x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 + S_2 = -2$$

$$11x_1 - 6x_2 + 0.x_3 - 3x_4 - 3x_5 + S_3 = -1$$

فنجد منهما ما يلي :

$$\sum_{x_j \in F_0} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,-7\} + Min\{0,0\} + Min\{0,-4\} + Min\{0,-3\} = -14 < S_2^0 = -2$$

$$\sum_{x_j \in F_0} Min\{0, a_{ij}\} = Min\{0,11\} + Min\{0,-6\} + Min\{0,-3\} + Min\{0,-3\} = -12 < S_3^0 = -1$$

ولذا فجميع المتغيرات في F_0 "غير واعدة" ولا يمكن لأي منها أن يقود إلى حل ممكن. نطبق الاختبار (4) في العقدة J_0 حيث أسقطنا المتغير x_3 في الاختبار (1) وحيث $F_0 \neq \phi$. نقوم الآن بحساب

$$v_j^m = \sum_{i=1}^{l} Min\{0, S_i^m - a_{ij}\}$$ لجمع قيم j عدا $j=3$

فنجد ما يلي :

$$v_1^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i1}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+7\} + Min\{0,-1-11\} = -12$$

$$v_2^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i2}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+0\} + Min\{0,-1+6\} = -2$$

$$v_4^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i4}\} = Min\{0,1-2\} + Min\{0,-2+4\} + Min\{0,-1+3\} = -1$$

$$v_5^0 = \sum_{i=1}^{3} Min\{0, S_i^0 - a_{i5}\} = Min\{0,1+1\} + Min\{0,-2+3\} + Min\{0,-1+3\} = 0$$

ولما كان $v_k^m = Max_{j \in F_m} \{v_j^m\}$ محققاً من أجل x_5 وحيث أن $v_5^0 = 0$ لذا فإننا،

وبموجب الاختبار (4)، نختار القيمة $x_5 = 1$.

التكرار (1). وصلنا في التكرار السابق إلى الاختيار $x_5 = 1$. لذا فنحن في العقدة $J_1 = \{5\}$ والتي تعني أن كافة المتغيرات في J_1 حرة عدا x_5 حيث ثبتناه على القيمة $x_5 = 1$ ويقودنا ذلك إلى الحل (1) التالي:

$$(S_1^1\ ,\ S_2^1\ \ ,S_3^1) = (2,1,2) \quad \text{وقيمته} \quad Z_1 = -5 \qquad \text{الحل}(1)$$

وهذا الحل ممكن، لذا $Z^u = -5$ والعقدة J_1 مشطوبة وعلينا الانتقال للتكرار التالي

التكرار (2). نستكمل العقدة J_1 فنحصل على العقدة $J_2 = \{-5\}$ (وتعني أننا أخذنا $x_5 = 0$) والتي تقود للحل(2) التالي:

$$(S_1^2\ ,\ S_2^2\ \ ,S_3^2) = (1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_2 = -8 \qquad \text{الحل}\ (2)$$

الآن نعيد تطبيق الاختبارات الأربعة على $J_2 = \{-5\}$ بطرق مماثلة لتلك التي فعلناها على العقدة J_0 فنجد أن الاختبار (1) يُسقط x_3. وبالنسبة للاختبار (2) نجد في هذه العقدة النتائج التالية للمتغيرات الحرة .(نذكر بأن x_5 غير حر في هذه العقدة)

للمتغير x_1 : لدينا $c_1 + Z_2 = 3 + (-8) = -5$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ محققة من أجل المتغير x_1، وبالتالي علينا أن نسقط x_1 .

للمتغير x_2 : لدينا $c_2 + Z_2 = 2 + (-8) = -6$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ غير محققة من أجل المتغير x_2.

للمتغير x_3 : لدينا $c_3 + Z_2 = 5 + (-8) = -3 > -5$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ محققة من أجل المتغير x_3، وبالتالي علينا أن نسقط x_3 .

للمتغير x_4 : لدينا $c_4 + Z_2 = 2 + (-8) = -6$ فالعلاقة $c_j + Z_m \geq Z^u$ غير محققة من أجل المتغير x_4.

لنطبق الآن الاختبار (3): لدينا $F_2 = \{2,\ 4\}$ غير خالية كما أنه لدينا $S_2^2 < 0$ و$S_3^2 < 0$ ونأخذ القيدين المقابلين من النموذج وهما:

$$-7x_1+0.x_2+3x_3-4x_4-3x_5+S_2=-2$$

$$11x_1-6x_2+0.x_3-3x_4-3x_5+S_3=-1$$

نجد منهما ما يلي :

$$\sum_{x_j\in F_2} Min\{0,a_{ij}\}=Min\{0,0\}+Min\{0,-4\}=-4<S_2^0=-2$$

$$\sum_{x_j\in F_2} Min\{0,a_{ij}\}=Min\{0,-6\}+Min\{0,-3\}=-9<S_3^0=-1$$

ولذا فجميع المتغيرات في F_2 غير واعدة ولا يمكن لأي منها أن يقود إلى حل ممكن.

نطبق الآن الاختبار (٤). لدينا :

$$v_2^2=\sum_{i=1}^{3} Min\{0,S_i^2-a_{i2}\}=Min\{0,1+1\}+Min\{0,-2+0\}+Min\{0,-1+6\}=-2$$

$$v_4^2=\sum_{i=1}^{3} Min\{0,S_i^2-a_{i4}\}=Min\{0,1-2\}+Min\{0,-2+4\}+Min\{0,-1+3\}=-1$$

وأكبرها 1- يختلف عن الصفر ويعود إلى x_4 ونضع $x_4=1$ ولكن الحل الناتج غير ممكن.

التكرار (3). لدينا إلى الآن $x_4=1$ ، $x_5=0$ (مثبتة) ولذا فإن $J_3=\{-5,4\}$ والتي تقود للحل (3) التالي :

$$(S_1^3\ ,S_2^3\ ,S_3^3)=(-1,2,2) \quad \text{وقيمته} \quad Z_3=-6 \quad \text{الحل (3)}$$

وكما في التكرارات السابقة فإن الاختبار (1) يُسقط x_3 ، والاختبار (2) يستثني كلاً من $x_1\ ,x_2\ ,x_3$ ولدينا $x_4=1$ ، $x_5=0$ (مثبتة)، وبالتالي $F_3=\phi$ ولذا فإننا نشطب J_3.

التكرار (4). بما أننا شطبنا J_3 فإننا نستكمل قيمة عنصرها في أقصى اليمين لنحصل بذلك على $J_4=\{-5,-4\}$ والتي تقود إلى الحل (4) التالي :

$$(S_1^3\ ,S_2^3\ ,S_3^3)=(1,-2,-1) \quad \text{وقيمته} \quad Z_4=-8 \quad \text{الحل (4)}$$

أيضاً وكما في التكرارات السابقة فإن الاختبار (1) يُسقط x_3 ، والاختبار (2) يستثني كلاً من x_3, x_1 والاختبار (3) يقود إلى $F_4 = \{2\}$ والذي يعني أن x_2 غير واعد ولدينا x_4=0 ، x_5 =0 (مثبتة)، ولذا فإننا نشطب J_4 .

وبما أن جميع عناصر J_4 سالبة فقد تم استعراض كافة الحلول والتي نجد منها أن الحل في J_1 هو الحل الأمثل وهذا الحل هو :

$$(x_1 \ , x_2 \ \ , x_3 , x_4 \ \ , x_5) = (0,0,0,0,1) \quad \text{وقيمته} \quad Z^* = Z_1 = -5 \ .$$

(٦,٥) تمارين (٦)

١– لدينا المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 5x_1^2 x_2^3 x_3 x_4 + 2x_1 x_2^2 x_3 + 3x_1 x_3^2$$

وفقا للقيود :

$$2x_2 + 7x_2^2 x_3 x_4 + 5x_4^2 x_1 \quad \le 10$$

$$x_j = 1 \ \text{أو} \ \ 0, \quad j = 1,2,3,4$$

المطلوب تحويل هذه المسألة إلى مسألة برمجة عددية ثنائية.

٢– ستقوم شركة بتنفيذ خمسة مشاريع خلال السنوات الثلاث القادمة. يعطي الجدول رقم (٦,٢) تكاليف تنفيذ كل من هذه المشاريع والربح المتوقع من كل مشروع والميزانية المتوافرة للتنفيذ في كل سنة [مليون دولار] لنفرض أن كل مشروع

يقع عليه الاختيار لتنفيذه فسيتم تنفيذه على مدار ثلاث سنوات وأن هدف الشركة هو جعل الأرباح الكلية العائدة من تنفيذ بعض أوكل المشاريع الخمسة أكبر ما يمكن، فالمطلوب

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية ثنائية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام الخوارزمية الجمعية.

الجدول رقم (٦,٢).

رقم المشروع	تكلفة السنة 1	تكلفة السنة 2	تكلفة السنة 3	الربح المتوقع للمشروع
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
الميزانية المتوافرة للتنفيذ	25	25	25	

٣– لديك المسألة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 \leq 0$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,3,4,5$$

المطلوب:

(أ) أعد كتابة المسألة بالشكل النموذجي بحيث تكون أمثال جميع المتغيرات في دالة الهدف موجبة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام "الخوارزمية الجمعية".

٤- تعتزم شركة أن تتخذ قراراً ببناء مصنع جديد في واحد من مكانيين A أو .

Bكذلك فإن الشركة تنوي بناء مخزن كبير في المكان الذي ستختاره لبناء المصنع. يعطي الجدول رقم (٦,٣) كل هذه البدائل وتكاليفها.

إذا علمت أن الميزانية المتوافرة هي 25$ مليون وأن متغيرات القرار هي $y_i =1$ إذا كان جواب القرار ب "نعم" و $y_i =0$ إذا كان جواب القرار ب "لا" فالمطلوب

الجدول رقم (٦,٣).

رقم القرار	نوع القرار	متغير القرار	الربح المتوقع$	التكلفة $
1	البناء في الموقع A	y_1	7 مليون	20 مليون
2	البناء في الموقع B	y_2	5 مليون	15 مليون
3	بناء المخزن في الموقع A	y_3	4 مليون	12 مليون
4	بناء المخزن في الموقع B	y_4	3 مليون	10 مليون

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الجمعية.

٥- أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام الخوارزمية الجمعية

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6$$

وفقا للقيود:

$$-2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 5$$

$$-5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -3$$

$$5x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq -1$$

$$x_j = 1 \text{ أو } 0 \quad ; \; j = 1,2,3,4,5\ ,6$$

٦- يقوم ثلاثة أشخاص بإنجاز ثلاثة أعمال وفقاً للأزمان الموضحة بالجدول رقم (٦،٤). المطلوب:

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة باستخدام الخوارزمية الجمعية.

(ج) رسم الشكل الذي يمثل جميع عمليات التفرع على جميع المتغيرات.

الجدول رقم (٦،٤).

الأشخاص	الوظائف		
	1	2	3
A	10	15	12
B	7	8	10
C	20	9	15

٧- يمكن لشركة أن تنتج أحد السلع على واحدة من أربعة مكائن صناعية لكل منها تكاليف تجهيز وتكاليف إنتاج متغيرة وطاقة إنتاجية محددة. البيانات معطاة بالجدول رقم (٦،٥). ترغب الشركة بإنتاج 2000 وحدة يومياً على الأقل من هذه السلعة، والمطلوب:

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل باستخدام الخوارزمية الجمعية.

الجدول رقم (٦,٥).

رقم الماكينة	التكاليف $		
	تكلفة التجهيز	تكلفة الإنتاج للوحدة	الطاقة الإنتاجية باليوم
1	1000	20	900
2	920	24	1000
3	800	16	1200
4	700	28	1600

٨- تدرس أحد دور النشر طباعة ٥ كتب جديدة. يحتوي الجدول رقم (٦,٦) على التكاليف التالية: الحد الأقصى الذي يمكن بيعه من كل كتاب، التكلفة المتغيرة لإنتاج كل كتاب، سعر بيع كل كتاب، تكلفة التجهيز لعملية إنتاج كل كتاب والطلب على كل كتاب. يمكن لدار النشر هذه أن تنتج 10000 كتاب شهرياً.

الجدول رقم (٦,٦).

التكاليف والطلب	رقم الكتاب				
	1	2	3	4	5
الطلب (نسخة)	5000	4000	3000	4000	3000
تكلفة الكتاب $	50	40	38	32	40
تكلفة التجهيز $	80	50	60	30	40

تهدف دار النشر لجعل الربح الكلي الناتج أكبر ما يمكن المطلوب:

(أ) صياغة المسألة بنموذج رياضي.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بالطريقة المناسبة.

٩- ترغب شركة بتنفيذ أربعة مشاريع تتنافس فيما بينها على الموارد المحدودة للشركة من المال. إن كل مشروع له عوائده الخاصة والتي تساوي رأس المال الذي تصرفه عليه الشركة مضافاً إليه العوائد الربحية لهذا المشروع. وفقاً لما يلي:

رقم المشروع	1	2	3	4
الربح المتوقع للمشروع /مليون $	40	30	50	60
التكلفة المتوقع للمشروع/مليون $	30	20	40	50

إذا علمت أنه قد توافرت للشركة ميزانية إجمالية مقدارها 100$ مليون فإنها ترغب معرفة أي المشاريع التي ستقوم بتنفيذها بحيث يتحقق لها أكبر ربح كلي ممكن.

المطلوب

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للشركة.

١٠- لدينا حقيبة تتسع ل 45 كيلو غرام ونرغب بملئها بخمسة عناصر بياناتها كما يلي:

رقم السلعة	1	2	3	4	5
وزن الوحدة/كغ	18	12	15	16	13
العائد من الوحدة $	27	9	30	16	6.5

الهدف هو جعل العائد الكلي الناتج من ملء الحقيبة بواحد أو أكثر من هذه العناصر أكبر ما يمكن والمطلوب:

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة عددية

(ب) إيجاد الحل الأمثل لها.

١١- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,٧) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٢- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,٩) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٣- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٢) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٤- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٣) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

١٥- أوجد الحل الأمثل لمثال (٣,١٤) من الفصل الثالث باستخدام الخوارزمية الجمعية.

الفصل السابع

طرق مستوي القطع
Cutting Plane Methods

(٧,١) مقدمة

كما رأينا في الفصل الخامس فإن "*طريقة التفرع والحد*" لحل مسائل "البرمجة العددية البحتة" تعتمد على القيام بإسقاط الشرط "أن متغيرات المسألة الأصلية لا تأخذ إلا قيما عددية صحيحة" وحل مسألة البرمجة الخطية الناتجة والتي أسميناها "المسألة المخففة". عندئذ إذا كانت جميع قيم المتغيرات في الحل الأمثل للمسألة المخففة الناتجة هي قيم عددية صحيحة فعندها يكون هذا الحل هو أيضا حلا أمثليا لمسألة البرمجة العددية الأصلية. وإلا فإننا نحرك دالة الهدف للمسألة المخففة الحالية اعتباراً من قيمتها المثلى بطريقة لا يمكننا فيها أن نتجاوز أي حل ممكن يمكن لقيمة دالة الهدف عنده أن تفوق القيمة المثلى لهذه المسألة المخففة. وبمعنى أخر فإن عملنا أشبه بإجراء عملية تهذيب للمسائل المخففة لحين الوصول إلى حل ممكن(فهو أمثل) للمسألة الأصلية.

والحل بالطريقة التي تسمى "طريقة مستوي القطع"(Cutting Plane Method) ينطلق أيضاً من "المسألة المخففة" (Relaxation Problem) ويعيد بناء فضاء الحل من خلال إضافة قيد إلى المسألة المخففة على أن يتم تصميم هذه القيد بطريقة خاصة وبحيث يحقق الخاصيتين الرئيستين التاليتين :

خاصية 1. أي حل ممكن لمسألة "البرمجة العددية الأصلية" يحقق القيد المضاف.

خاصية 2. الحل الأمثل "للمسألة المخففة الحالية" لا يحقق القيد المضاف.

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوي القطع (Cutting Plane). وفي الحقيقة فإن الخاصية2. تعني أن مثل مستوي القطع هذا يقطع أو يفصل(Cut) الحل الأمثل" للمسألة المخففة" عن فضاء حلها فيصبح حلاً غير ممكن. أما الخاصية 1. فتعني أن إضافة مثل مستوي القطع هذا لن يُفقدنا أي حل ممكن من حلول المسألة الأصلية. وتتم عملية رد الحلول غير الممكنة الناتجة للمسائل المخففة المتتالية *باستخدام طريقة السمبلكس الثنوية* ، والتي تعرفنا عليها في الفصل الأول، إلى حلول مثلى ممكنة ولكنها حلول ذات قيم عددية صحيحة لتلك المسائل. فنكون بذلك قد حصلنا على حل أمثل لمسألة البرمجة العددية الأصلية وهو ما نبحث عنه. وسنوضح كافة الأمور من خلال المثالين التمهيديين التالين، ولكننا نود قبل ذلك التذكير بالملاحظة (١) من مقدمة الباب الثاني وهي أنه إذا كان لدينا مسألتين تنتج الثانية عن الأولى بإضافة قيد أو أكثر لقيود الأولى فإن فضاء الحل للثانية يكون مجموعة جزئية من فضاء الحل للأولى.

مثال (٧,١)

تقوم شركة بإنتاج صنفين من السجاد A و B ، الربح المتوقع لكل وحدة من A هو 30 ريال والربح المتوقع لكل وحدة من B هو 25 ريال. تمر عملية إنتاج كل من صنفي السجاد بقسمين هما قسم النسيج وقسم الإخراج النهائي، ويخضع كل منها لبعض القيود والتي تتمثل بما يلي :

١- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم النسيج.

٢- توفر 40 ساعة عمل يومية في قسم الاخراج النهائي.

٣- عدد الوحدات التي يمكن بيعها يوميا من النموذج B لا تتجاوز 12 وحدة.

٤- كل وحدة تصنع من A تستغرق ساعتين في قسم النسيج وساعة في قسم الإخراج النهائي وإن كل وحدة تصنع من B تستغرق ساعة في قسم النسيج و3 ساعات في قسم الإخراج النهائي.

ترغب الشركة في وضع برنامج إنتاجي لكلا الصنفين بحيث تكون الأرباح العائدة منهما معاً أكبر ما يمكن. المطلوب إيجاد الحل الأمثل للشركة.

الحل

لو رمزنا بالرمز x_2, x_1 لعدد الوحدات التي ستنتجها الشركة من الصنفين A وB على الترتيب لكان النموذج الرياضي لهذه المسألة هو

كبر الدالة:

$$Z = 30x_1 + 25x_2 \qquad (٧,١)$$

وفقا للقيود:

$$2x_1 + x_2 \leq 40$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 40$$

$$x_2 \leq 12$$

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

أعداد صحيحة $x_1 \ , \ x_2$

ولكان جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة، بعد حذف القيد الأخير ($x_1 \ , \ x_2$ أعداد صحيحة) معطى في الجدول رقم (٧,١).

الجدول رقم (٧,١).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	13	4	0	680
x_1	1	0	0.6	-0.2	0	16
x_2	0	1	-0.2	0.4	0	8
s_3	0	0	0	0.2	-0.1	1

فالحل الأمثل للمسألة المخففة هو $x_1 = 16$ $x_2 = 8$ و $Z = 680$. ولما كانت قيم x_2, x_1 صحيحة فهذا الحل هو أيضاً حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,١).

مثال (٧,٢)

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2 \qquad (٧,٢)$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \le 45$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

$$x_1 \;,\; x_2 \ge 0$$

وبإضافة المتغيرات الراكدة نجد أن المسألة المخففة هي :

كبر الدالة :

$$Z = 8x_1 + 5x_2 \qquad (٧,٣)$$

وفقا للقيود:

$$x_1 + x_2 + s_1 = 6$$

$$9x_1 + 5x_2 + s_2 = 45$$

$$x_1 \ , x_2, s_1 \ , s_2 \geq 0$$

والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذا المثال معطى في الجدول رقم (٧,٢)
وفضاء الحل معطى للمسألة المخففة موضح كما في كما في الشكل رقم (٧,١).

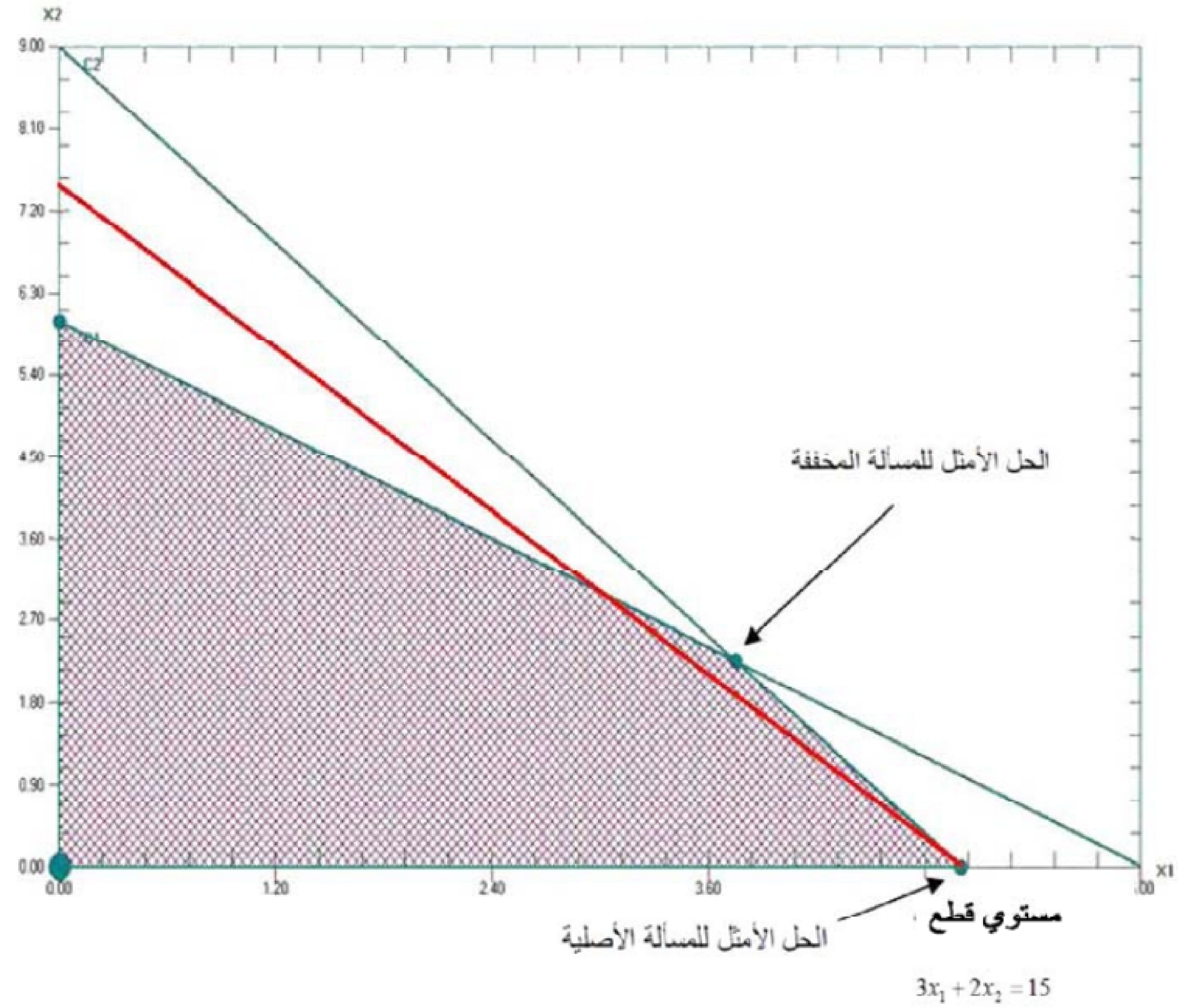
ولتطبيق طريقة مستوي القطع فإننا نختار أي قيد (في الحقيقة ثمة بعض القواعد التي نقوم بموجبها بتحديد مناسب للقيد الذي سنقوم باختياره) من جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة والتي تكون فيه قيمة متغير من

الجدول رقم (٧,٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	1.25	.75	41.25
x_2	0	1	2.25	-.25	2.25
x_1	1	0	-1.25	.25	3.75

المتغيرات الأساسية قيمة كسرية (غير صحيحة). فلو اخترنا القيد الثاني مثلاً وهو $x_1 - 1.25s_1 + .25s_2 = 3.75$ فإننا نعيد كتابته بحيث نكتب جميع المعاملات فيه على شكل مجموع (الجزء الصحيح + الجزء الكسري) فنجد

$$x_1 - 2s_1 + 0.75s_1 + 0.s_2 + 0.25s_2 = 3 + 0.75$$



الشكل رقم (٧,١).

الآن نعيد وضع الأجزاء الصحيحة بطرف والأجزاء الكسرية في الطرف الآخر فنجد

$$x_1 - 2s_1 + 0.s_2 - 3 = 0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \qquad (٧,٤)$$

وتقترح طريقة مستوي القطع إضافة القيد التالي لجدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة:

الطرف الأيمن من (٧,٤) ≥ 0.

أي إضافة القيد التالي :

$$0.75 - 0.75s_1 - 0.25s_2 \leq 0 \qquad (٧,٥)$$

ويسمى مثل هذا القيد المضاف باسم مستوى قطع (Cutting Plane).

وكما أشرنا أعلاه فإن مثل هذا القيد يجب أن يحقق الخاصيتن 1. و2. السابقتين. وسنوضح ذلك فيما يلي :

تحقق الخاصية1. لنفرض أن (x_1, x_2) هو حل ممكن للمسألة الأصلية عندئذٍ يكون (x_1, x_2) حلاً ممكناً للمسألة المخففة وبالتالي لابد لهذا الحل أن يحقق القيد (٧,٤) حيث $s_1, s_2 \geq 0$. ولما كان $0.75 < 1$ فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧,٤) أقل من الواحد أيضاً. ولكن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيسر من القيد (٧,٤) عدداً صحيحاً، وبالتالي فإن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيجعل الطرف الأيمن من القيد (٧,٤) عدداً صحيحاً أقل من الواحد، أي *صفر أو أقل*. ومن ذلك نجد أن أي حل ممكن (x_1, x_2) للمسألة الأصلية سيحقق القيد أو مستوي القطع (٧,٥)، وبذلك تتحقق الخاصية1.

تحقق الخاصية2. سنوضح الآن أن الحل الأمثل للمسألة المخففة الحالية لا يمكن أن يحقق مستوي القطع (٧,٥)، والذي يعني أن مثل هذا القطع يقطع أو يفصل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن فضاء الحل للمسألة الأصلية. ولبيان ذلك نلاحظ من جدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة أن $s_1 = s_2 = 0$ في هذا الحل وبالتالي لا يمكن لهذا الحل أن يحقق مستوى القطع (٧,٥).

لتطبق طريقة مستوي القطع نقوم بإضافة متغير راكد للقطع (٧,٥) فنحصل على القيد التالي :

$$-0.75s_1-0.25s_2+s_3=-0.75 \qquad (٧,٦)$$

ثم نقوم بإضافة القيد الناتج إلى جدول الحل الأمثل (٧,٢) للمسألة المخففة الحالية فنجد الجدول رقم (٧,٣) التالي :

الجدول رقم (٧,٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1 متغير داخل	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	1.25	0.75	0	41.25
x_2	0	1	2.25	-0.25	0	2.25
x_1	1	0	-1.25	0.25	0	3.75
s_3 متغير خارج	0	0	-0.75	-0.25	1	-0.75
النسبة			-5/3	-3		

وكما نلاحظ فإن الحل المعطى بالجدول رقم (٧,٣) غير ممكن لأن $0 \le s_3$. نقوم الآن بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٣) للحصول على الحل الأمثل (راجع هذه الطريقة في نهاية الفصل الأول). فبما أن مسألتنا هي مسألة تكبير وبحسب سطر النسبة فإن المتغير الداخل هو s_1 فالعنصر المحوري هو 0.75- . وباستكمال الحسابات الخاصة بطريقة السمبلكس (العادية) فإننا نحصل على الجدول رقم (٧,٤). والحل في الجدول رقم (٧,٤) هو حل أمثل للمسألة المخففة وجميع قيم المتغيرات فيه صحيحة فهو بالتالي حل أمثل للمسألة الأصلية (٧,٢). وهذا الحل الأمثل هو $x_1=5$, $x_2=0$, وZ=40.

وللحصول على معادلة مستوي القطع، الذي أوصلنا للحل الأمثل المنشود للمسألة الأصلية، نوجد قيمة s_1 من القيد $x_1+x_2+s_1=6$ وقيمة s_2 من القيد $9x_1+5x_2+s_2=45$ في النموذج (٧,٣) ونعوضهما في معادلة مستوي القطع (٧,٥) فنجد ما يلي :

الجدول رقم (٧,٤).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	S_3	الحل
Z	0	0	0	0.33	1.67	40
x_2	0	1	0	-1	3	0
x_1	1	0	0	0.67	-1.67	5
s_1	0	0	1	0.33	-1.33	1

$$0.75-0.75(6-x_1-x_2)-0.25(45-9x_1-5x_2)=0$$

وبإصلاح هذه العلاقة نحصل على $3x_1+2x_2\leq 15$ والتي تمثل مستوي القطع المطلوب. وقد أظهرنا هذا القطع كخط ملون في الشكل رقم (٧,١). لاحظ أن هذا القطع قد عزل الحل الأمثل للمسألة المخففة عن مجموعة الحلول للمسألة الأصلية.

(٧,٢) خوارزميات مستوي القطع
Cutting Plane Algorithms

بعد المثال التمهيدي السابق فإننا سنتعرف في هذه الفقرة على بعض الخوارزميات الأساسية التي تمكننا من حل"مسائل البرمجة الخطية العددية" البحتة والمختلطة.

(٧,٢,١) خوارزمية مستوي القطع لحل مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة

تطبق هذه الخوارزمية على مسائل البرمجة الخطية العددية البحتة فقط حيث لا تأخذ المتغيرات في هذا النوع من المسائل إلا قيماً صحيحة. وتتطلب هذه الخوارزمية الشرط التالي

شرط1. *" أن تكون معاملات المتغيرات في كافة القيود وفي الأطراف اليمنى لهذه القيود بما في ذلك دالة الهدف أعداد صحيحة "* .

إن تحقيق الشرط1. ممكن دوماً ، فمثلاً لو أخذنا القيد التالي $x_1+\frac{3}{2}x_2\leq\frac{15}{3}$ وقمنا بتوحيد المقامات فيه لحصلنا على القيد المكافئ التالي $6x_1+9x_2\leq 30$ حيث كافة المعاملات فيه صحيحة.

خطوات الخوارزمية

خطوة (1)

نسقط الشرط أن المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة" الناتجة. (مسألة البرمجة الخطية الناتجة). فإذا كان الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة أعداداً صحيحة (كما في مثال (٧,١) مثلاً) فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (2).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة ونولد مستوي قطع من قيد هذا المتغير ونضيف مستوي القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية ، ويكون ذلك على النحو التالي :

خطوة (2،أ). لنفرض أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة (تكبير أو تصغير) كان على الشكل التالي(الجدول رقم (٧,٥)) في هذا الحل $x_1,.......,x_n$ هي المتغيرات الأساسية و $s_1,.........s_m$ هي المتغيرات غير الأساسية. الآن لنأخذ سطر x_i في هذا الجدول فنجد منه

الجدول رقم (٧,٥).

	x_1	.	x_i	.	x_n	s_1	...	s_j	...	s_m	الحل
z	0		0	.	0	b_1	...	b_j	...	b_m	z_0
x_1	1	.	0	.	0	a_{11}	.	a_{1j}	.	a_{1m}	v_1
....											....
x_i	0	.	1	.	0	a_{i1}	.	a_{ij}		a_{im}	v_i
...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	...
x_n	0	.	0	.	1	a_{n1}	.	a_{nj}		a_{nm}	v_n

$$x_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,٧)$$

حيث v_i هي قيمة غير صحيحة.

ويشار لمثل العلاقة (٧,٧) باسم "سطر أساس" (Source Row). في مثل هذا السطر نكتب كل من v_i و a_{ij} على الشكل [x]+f حيث [X]هي الجزء الصحيح من X و f هي الجزء الكسري من x ولذا فإن $0 \le f < 1$ فيكون لدينا:

$$a_{ij} = [a_{ij}] + f_{ij} \quad \text{و} \quad v_i = [v_i] + f_i \qquad (٧,٨)$$

ثم نعوض (٧,٨) في سطر الأساس (٧,٧) فنجد ما يلي:

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j == v_i - [v_i] + \sum_{j=1}^{m} [a_{ij}] s_j \qquad (٧,٩)$$

وحيث أننا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j، فإن ذلك الاشتراط لا يتحقق إلا إذا كان الطرف الأيمن من العلاقة (٧,٩) عدداً صحيحاً، والذي يؤدي بدوره إلى أن يكون الطرف الأيسر من العلاقة (٧,٩) أيضا عدداً صحيحاً. ولما كان $f_{ij} \ge 0$ و $s_j \ge 0$ لجميع قيم i و j كان لدينا

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \le f_i \qquad (٧,١٠)$$

وبما أن $f_i < 1$ والطرف الأيسر من (٧,١٠) عدد صحيح، فسيكون لدينا بالضرورة

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \le 0 \qquad (٧,١١)$$

إذاً فالقيد (٧,١١) هو قيد ضروري لكي تكون قيم كل من المتغيرات x_i و s_j أعداداً صحيحة لكافة قيم i و j .

خطوة (2،ب). نضيف متغيراً راكداً y_i للقيد (٧,١١) ثم نضيف القيد الناتج للجدول رقم (٧,٥) والذي يمثل الحل الأمثل للمسألة المخففة فيكون لدينا

$$f_i - \sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j + y_i = 0 \qquad (٧,١٢)$$

كما ذكرنا أعلاه فإن مثل القيد (٧,١٢) يسمى "مستو قطع بحت" (Pure Cutting Plane). وكلمة "بحت" مردها إلى أن مسألتنا هي مسألة برمجة خطية عددية بحتة. ولذلك فإنه يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوي القطع البحتة" (Pure Cutting Plane Algorithm).

والقيد المضاف (٧,١٢) يعني أن الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن، لأنه وبموجب (٧,١١) فإن $y_i = - f_i \leq 0$. فلا بد إذاً من رد مثل هذه القيمة السالبة، والتي تعتبر غير ممكنة، إلى قيمة ممكنة. ومن الطرق التي توافرت شروطها (شرط الأمثلية محقق في سطر دالة الهدف لكن قيمة أحد المتغيرات الأساسية غير موجبة) والتي يمكننا فيها الوصول إلى ما نريد هي "طريقة السمبلكس الثنوية" التي نوهنا عنها أعلاه.

خطوة (3)

نطبق "طريقة السمبلكس الثنوية" بعد إضافة القيد (٧,١٢) إلى جدول الحل الأمثل (٧,٥) ثم نحل المسألة المخففة الناتجة. فإذا كان الحل لهذه المسألة الأخيرة صحيحاً فإننا نتوقف (نذكر بما فعلناه في مثال (٧,٢))، وإلا فإننا نولد مستوي قطع جديداً ونكرر العمل السابق لحين الوصول إلى حل أمثل قيم جميع متغيراته صحيحة وموجبة.

يبقى السؤال الآن

هل من قاعدة لاختيار سطر الأساس والذي يتم من خلاله توليد مستوي قطع مناسب؟.

ويعبارة أخرى: هل من مستوي قطع أقوى أو أفضل من مستوي قطع آخر؟.

للإجابة نعود للقطع (٧,١١) المأخوذ من سطر الأساس x_i فنجد أنه يمكن تعريفه بالشكل المكافئ التالي :

$$\sum_{j=1}^{m} f_{ij} s_j \geq f_i \qquad (٧,١٣)$$

ولو أخذنا سطر الأساس x_k لوجدنا منه مستوي القطع التالي :

$$\sum_{j=1}^{m} f_{kj} s_j \geq f_k \qquad (٧,١٤)$$

ولدينا بهذا الخصوص التعريف التالي :

تعريف (٧,١)

نقول عن القطع (٧,١٣) إنه أفضل أو أقوى من القطع (٧,١٤) إذا كان

(أ) $f_i \geq f_k$ (ب) $f_{ij} \geq f_{kj}$ لجميع قيم j

على أن تتحقق واحدة على الأقل من المتراجحتين في (أ) أو (ب) بشكل حاد (أي من غير مساواة).

ثمة مقاييس أخرى للمفاضلة بين أكثر من مستوي قطع منها

(أ) أن نختار مستوي القطع الذي يملك أكبر قيمة كسرية (أي $Max_i \ f_i$).

(ب) أن نختار مستوي القطع الذي يملك أكبر قيمة ل $Max_i \ f_i / \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$.

(ج) أن نختار مستوي القطع الذي يملك قيمة كسرية قريبة من ½ .

وقد أظهرت التجارب فعالية المقياس (II) ، ولذا فإننا سنعتمده غالباً في حساباتنا للأمثلة القادمة.

مثال (٧,٣)

أوجد الحل الأمثل للمسألة التالية باستخدام طريقة مستوي القطع

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \quad (٧,١٥)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

x_1 , x_2 أعداد صحيحة

$$x_1 \ , \ x_2 \geq 0$$

الحل

إن فضاء الحل والحل الأمثل للمسألة المخففة لهذه المسألة موضحة كما في الشكل رقم (٧,٢). ولحل المسألة المخففة لهذه المسألة لابد لنا من إضافة المتغيرات الراكدة والاصطناعية حيث نحصل على الشكل القياسي التالي:

صغر الدالة:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \quad (٧,١٦)$$

وفقا للقيود:

$$3x_1 + x_2 - s_1 + a_1 = 4$$

$$x_1 + 2x_2 - s_2 + a_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, a_1, s_2, a_2 \geq 0$$

وباستخدام طريقة المرحلتين(راجع الفصل الأول) نجد أن جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة معطى كما في الجدول رقم (٧,٦).

الجدول رقم (٧,٦). الحل الأمثل للمسألة المخففة للمسألة (٧,١٥).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-1	-1	44/5=8.8
x_1	1	0	-2/5	1/5	4/5=0.8
x_2	0	1	1/5	-3/5	8/5=1.6

وكما نلاحظ فإن الحل الأمثل الناتج للمسألة المخففة هو أعداد غير صحيحة، لذا علينا توليد مستوي قطع. وهنا لدينا ما يلي :

سطر x_1 هو : $x_1 - \frac{2}{5}s_1 + \frac{1}{5}s_2 = \frac{4}{5} = 0.8 = 0 + 0.8$ ومنه نجد أن $f_1 = 0.8$

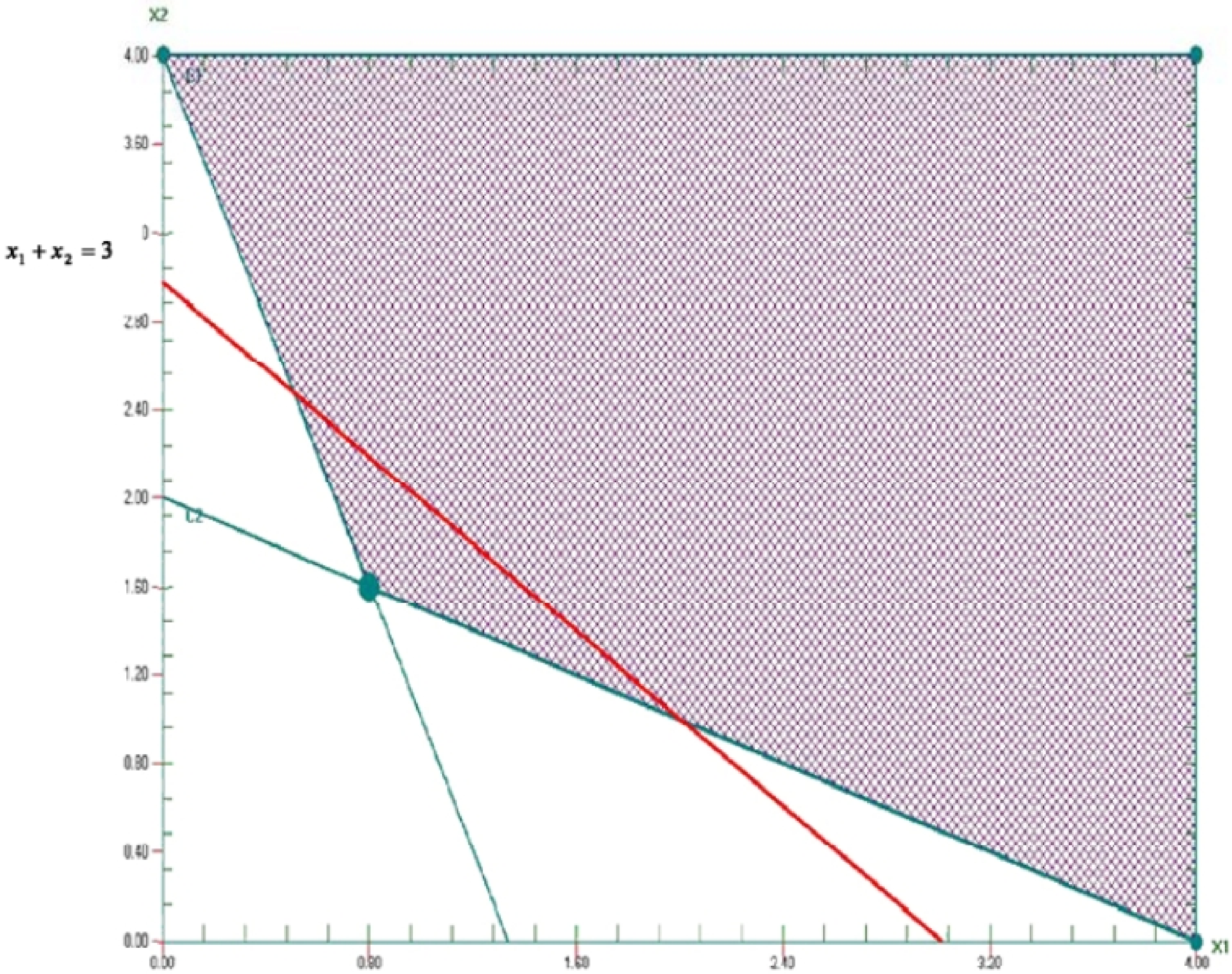
$a_{11} = -2/5 = -0.4 = -1 + 0.6$ ، $a_{12} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2$ ، $f_{11} = 0.6$

، $f_{12} = 0.2$ وبالتالي فإن $f_1/(f_{11} + f_{12}) = 0.8/(0.6 + 0.2) = 1$.

سطر x_2 هو : $x_2 + \frac{1}{5}s_1 - 3s_2 = \frac{8}{5} = 1.6 = 1 + 0.6$ ومنه نجد أن $f_2 = 0.6$

$a_{21} = 1/5 = 0.2 = 0 + 0.2$ ، $a_{22} = -3/5 = -0.6 = -1 + 0.4$ ،

$f_{21} = 0.2$ ، $f_{22} = 0.4$ وبالتالي فإن $f_2/(f_{21} + f_{22}) = 0.6/(0.2 + 0.4) = 1$.



الشكل رقم (٧,٢).

وبموجب معايير المفاضلة (I)، (II)، (III) أعلاه نجد أن اختيار سطر x_2 كسطر أساس أولى من اختيار سطر x_1 لأنه يتعادل مع x_1 في المعيار (II) ويحقق المعيار (III). وبموجب (٧,١٢) علينا أن نضيف مستوي القطع التالي إلى الجدول رقم (٧,٦)

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2 \leq 0 \qquad (٧,١٧)$$

وبإضافة المتغير الراكد y_2 نجد

$$f_2-\sum_{j=1}^{m} f_{2j}s_j+y_2=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2+y_2=0$$

والذي يكافئ القيد التالي (نفرض أن $y_2 = s_3$)

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{5}s_1-\frac{2}{5}s_2+s_3=0 \qquad (٧,١٨)$$

فنحصل بهذه الإضافة على الجدول رقم (٧,٧) وهو يمثل حل غير ممكن لأن فيه $s_3<0$. ونظراً لأن شرط الأمثلية لمسألة التصغير هذه متحقق في سطر دالة الهدف فإنه يمكننا تطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,٧) الأخير.

وبحسب النتائج في عمود النسبة نجد أن المتغير الداخل هو s_1 . وبإجراء الحسابات بطريقة السمبلكس نحصل على النتائج الموضحة في الجدول رقم (٧,٨) الذي يمثل الحل الأمثل لأن قيم دالة الهدف وكذلك قيم جميع المتغيرات هي أعداد صحيحة، كما أن شرط الأمثلية في سطر دالة الهدف مازال محققاً. وكما نلاحظ فقد لزمنا مستوي قطع واحد للوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية (٧,١٥) وهو مستوي القطع (٧,١٧).

الجدول رقم (٧,٧).

الحل	s_3	s_2	داخل s_1	x_2	x_1	المتغيرات
44/5	0	-1	-1	0	0	Z
4/5	0	1/5	-2/5	0	1	x_1
8/5	0	-3/5	1/5	1	0	x_2
-3/5	1	-2/5	-1/5	0	0	s_3 خارج
		5/2	5			النسبة

الجدول رقم (٧,٨).

الحل	s_3	s_2	s_1	x_2	x_1	المتغيرات
10	-1	-1	0	0	0	Z
2	-2	1	0	0	1	x_1
1	1	-1	0	1	0	x_2
3	-5	2	1	0	0	s_1

ولإيجـاد مـستوي القطـع هـذا بدلالـة المتغيرات الأصـلية x_2 , x_1 فإننـا نعـوض عـن s_2 , s_1 مـن القيـود الأصـلية في المـسألة (٧,١٧) بعـد إسـقاط المتغيرات الاصـطناعية a_2 , a_1 فنجد أن

$$s_2 = x_1 + 2x_2 - 4 \quad s_1 = 3x_1 + x_2 - 4$$

وبالتعويض في العلاقة (٧,١٧) وإصلاحها نجد مستوي القطع التالي :

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

وقد أظهرنا مستوي القطع أعلاه على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧,٢).

(٧,٢,٢) خوارزمية مستوي القطع لحل مسائل البرمجة الخطية العددية المختلطة

سبق وأن عرفنا مسألة "*البرمجة الخطية العددية المختلطة*" بأنها تلك التي تأخذ فيها بعض متغيرات هذه المسألة قيماً صحيحة بينما تأخذ باقي المتغيرات قيما اختيارية. ولذا فإن ثمة فروق أساسية في خطوات الحصول على الحل الأمثل مقارنة مع الخوارزمية (٧,٢,١) السابق. وتتمثل هـذه الفـروق في أنـه لا ضـرورة هنـا لتحقـق *الـشرط1* أعـلاه للقيود المتعلقة بالمتغيرات التي لا يشترط لها أن تأخذ قيماً صحيحة. وسنوضح هذه الفروق في خطوات الخوارزمية فيما يلي :

خطوات الخوارزمية

خطوة (1)

نسقط الشرط الخاص بأن بعض المتغيرات تأخذ قيماً صحيحة فقط ونحل "المسألة المخففة الناتجة" كمسألة برمجة خطية. فإذا كان الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" يحقق الشرط المتعلق بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية فإن هذا الحل هو حل أمثل للمسألة الأصلية وعندها نتوقف. وإلا انتقلنا إلى الخطوة (2).

خطوة (2)

نختار أحد المتغيرات ذات القيمة غير الصحيحة من بين المتغيرات التي يشترط في قيمها أن تكون صحيحة ونولد مستو قطع من قيد هذا المتغير ونضيفه مستو القطع هذا إلى جدول الحل الأمثل للمسألة المخففة ثم نحل المسألة الناتجة بطريقة السمبلكس الثنوية، ويكون ذلك على النحو التالي:

لنفرض، كما في السابق، أن المتغير x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة وأن سطر x_i (كسطر أساس) في جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" هو:

$$x_i = v_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j = v_i = [v_i] + f_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,١٨)$$

(حيث v_i هي قيمة غير صحيحة) والذي يكافئ

$$x_i - [v_i] = f_i - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \qquad (٧,١٩)$$

وحيث أننا هنا لا نشترط أن تكون قيم كل من المتغيرات s_j أعداداً صحيحة فإننا لن نستطيع استخدام الطريقة التي شرحناها في (٧,٢,١) لتوليد مستو قطع المنشود. وهنا نلاحظ ما يلي.

بما أن x_i لا يأخذ إلا قيماً صحيحة فإن هذا يعني الآتي:

إما أن يكون $x_i \le [v_i]$ ، أو أن يكون $x_i \ge [v_i] + 1$ (٧,٢٠)

ومن (٧,١٩) نجد أن الشرط (٧,٢٠) يعني أيضا ما يلي:

إما

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢١)$$

أو

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} s_j \le f_i - 1 \qquad (٧,٢٢)$$

ومن الواضح أن (٧,٢١) و(٧,٢٢) لا يمكن أن تتحققا بآن واحد (نكرر هنا أننا لم نشترط أن تكون المتغيرات s_j صحيحة كما في السابق).

الآن لنعرف المجموعتين A^- , A^+ كما يلي

A^+ هي مجوعة الأدلة j التي تكون فيها $a_{ij} \ge 0$

A^- هي مجوعة الأدلة j التي تكون فيها $a_{ij} < 0$

عندئذ نجد من (٧,٢١) و(٧,٢٢) ما يلي :

إما

$$\sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٣)$$

أو

$$\frac{f_i}{f_i - 1} . \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٤)$$

ولا يمكن للعلاقتين (٧,٢٣) و(٧,٢٤) أيضاً أن تتحققا بآن واحد.

وهنا نلاحظ أنه يمكن دمج العلاقتين (٧,٢٣) و(٧,٢٤) بالعلاقة التالية :

$$\sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} . \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \ge f_i \qquad (٧,٢٥\ أ)$$

وبإضافة المتغير الراكد y_i إلى العلاقة الأخيرة فإننا نحصل على العلاقة التالية :

$$y_i \quad - \left\{ \sum_{j \in A^+} a_{ij} s_j + \frac{f_i}{f_i - 1} . \sum_{j \in A^-} a_{ij} s_j \right\} = -f_i \qquad (٧,٢٥\ ب)$$

والعلاقة (٧,٢٥ ب) تمثل ما يطلق عليه اسم مستوي قطع مختلط (Mixed Cutting Plane). ولذلك يطلق أيضاً على هذه الخوارزمية اسم "خوارزمية مستوي القطع المختلطة" (The Mixed Plane Algorithm) .

ونظراً لأننا توصلنا للعلاقة (٧,٢٥) من العلاقة (٧,٢٠) ولما كانت هذه الأخيرة تمثل كما أسلفنا الشرط الضروري لكي يكون x_i صحيحاً، فإن مستوي القطع المختلط (٧,٢٥ ب) يمثل أيضاً مثل هذا الشرط الضروري.

الآن نضيف القيد (٧,٢٥ ب) إلى جدول الحل الأمثل "للمسألة المخففة الناتجة" فيكون الحل الناتج بعد إضافة هذا القيد هو حل غير ممكن. ثم نستخدم طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول الناتج للحصول على حل أمثل جديد "للمسألة المخففة الناتجة"، فإذا كان هذا الحل الأمثل الجديد يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية فإنه يمثل أيضاً الحل الأمثل لهذه المسألة الأخيرة وعندها نتوقف وإلا ننتقل إلى الخطوة (3).

خطوة (3)

نولد مستوي قطع مختلطاً جديداً ونكرر العمل السابق في الخطوة (2) لحين الوصول إلى حل أمثل يحقق المتطلبات الخاصة بطبيعة كل من متغيرات المسألة الأصلية.

سنوضح الآن كيفية تطبيق الخوارزمية (٧,٢,٢) من خلال المثال التالي:

مثال (٧,٤)

كبر الدالة:

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٦)$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 \le 6$$

$$7x_1 + x_2 \le 35$$

x_1 عدد صحيح

$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

الحل

إذا أسقطنا الشرط "أن x_1 عدد صحيح" نتج لدينا المسألة المخففة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٧)$$

وفقا للقيود :

$$3x_2 - x_1 \le 6$$

$$7x_1 + x_2 \le 35$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ge 0$$

إن فضاء الحل للمسألة المخففة (٧,٢٧) معطى كما في الشكل رقم (٧,٣) وبإضافة المتغيرات الراكدة s_2 , s_1 للنموذج (٧,٢٧) نحصل على النموذج التالي :

كبر الدالة :

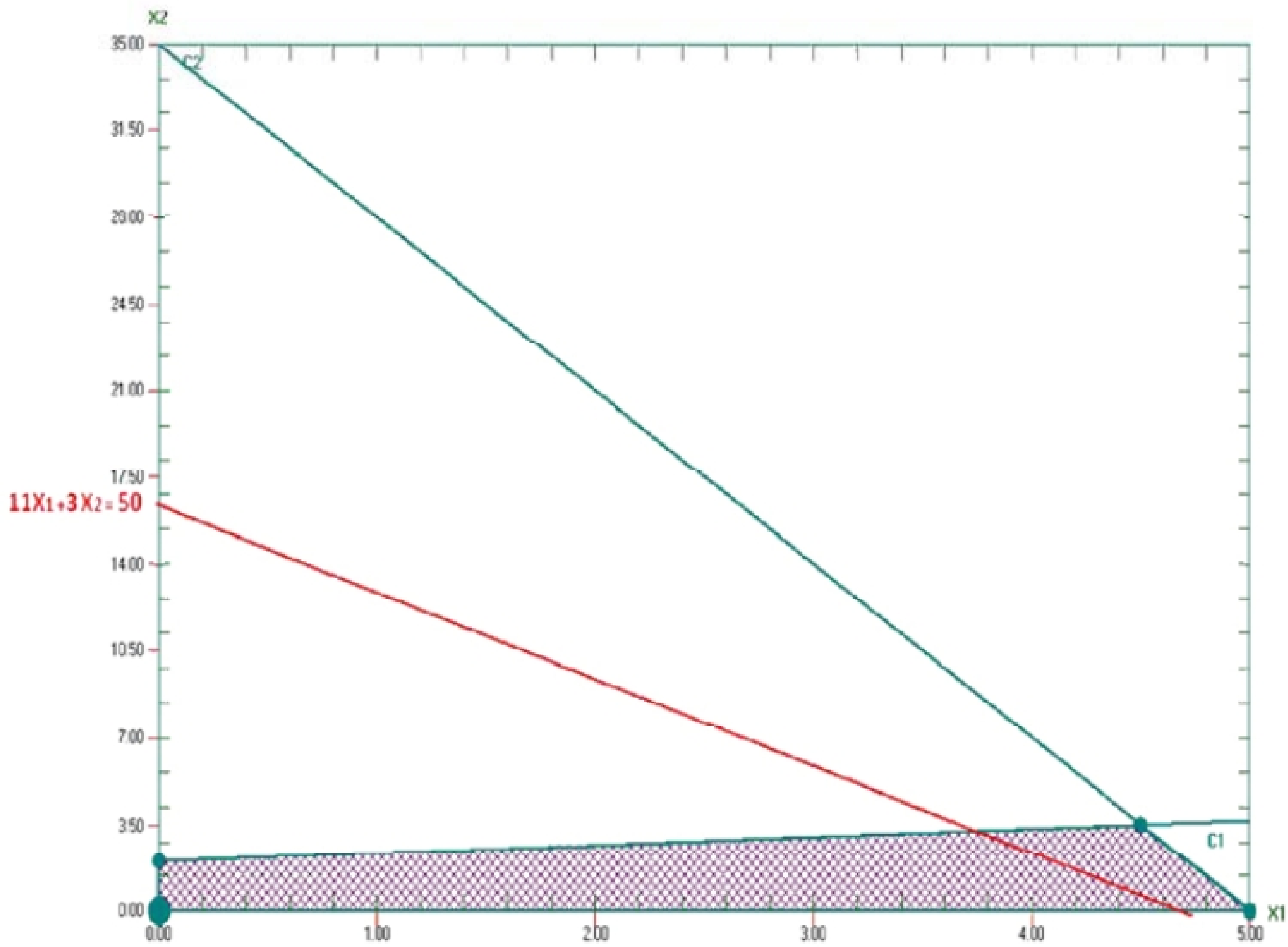
$$Z = 7x_1 + 9x_2 \qquad (٧,٢٨)$$

وفقا للقيود:

$$3x_2 - x_1 + s_1 = 6$$

$$7x_1 + x_2 + s_2 = 35$$

$$x_1 \ , x_2 \ ,s_1 \ ,s_2 \geq 0$$



الشكل رقم (٧,٣).

وبحل النموذج الناتج (٧,٢٨) نجد أن جدول الحل الأمثل ممثل بالجدول رقم (٧,٩).
فبما أن x_1 هو المتغير الوحيد الذي تقتصر قيمه على قيم صحيحة فلا بد من استخدام سطر x_1 كسطر أساس. ومن الجدول رقم (٧,٩) نجد

$$x_1 - \frac{1}{22}s_1 + \frac{3}{22}s_2 = \frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

وهنا نلاحظ أن $f_1 = \frac{1}{2}$ وأن معامل s_1 موجب (3/22=) ومعامل s_2 سالب (-1/22=).
وبموجب (٧,٢٥ب) نجد مستوي القطع المختلط التالي:

$$\frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1 \geq \frac{1}{2} \qquad (\text{٧,٢٩ أ})$$

الجدول رقم (٧,٩). الحل الأمثل للمسألة المخففة (٧,٢٨).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	28/11	15/11	63
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

وبإضافة المتغير الراكد y_1 نحصل على مستوي القطع المختلط التالي:

$$y_1 - \{ \frac{3}{22}s_2 + \frac{1/2}{1/2-1}(-\frac{1}{22})s_1 \} = -\frac{1}{2}$$

والذي يكافئ (نفرض أن $s_3 = y_1$)

$$s_3 - \frac{1}{22}s_1 - \frac{3}{22}s_2 = -\frac{1}{2} \qquad (\text{٧,٢٩ ب})$$

وبإضافة (٧,٢٩ب) إلى جدول الحل الأمثل (٧,٩) فإننا نحصل على الجدول رقم (٧,١٠) التالي.

الجدول رقم (٧,١٠).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2 داخل	s_3	الحل
Z	0	0	28/11	15/11	0	63
x_1	1	0	-1/22	3/22	0	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	0	7/2
s_3 خارج	0	0	-1/22	-3/22	1	-1/2
النسبة			-14	-5/2		

الآن نقوم بتطبيق طريقة السمبلكس الثنوية على الجدول رقم (٧,١٠)، فنجد من نتائج سطر النسبة أن s_2 هو المتغير الداخل وأن s_3 هو المتغير الخارج. وبإجراء الحسابات على الجدول رقم (٧,١٠) حسب طريقة السمبلكس (العادية) نجد الجدول رقم (٧,١١) التالي.

الجدول رقم (٧,١١).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	23/11	0	10	58
x_1	1	0	-1/11	0	1	4
x_2	0	1	10/33	0	-1/3	10/3
s_2	0	0	1/3	1	-22/3	11/3

والجدول رقم (٧,١١) يمثل الحل الأمثل المنشود لأن شرط الأمثلية (كمسألة تكبير) محقق في سطر دالة الهدف، والمتطلبات المتعلقة بطبيعة متغيرات المسألة الأصلية (٧,٢٧) وهي x_1 عدد صحيح غير سالب (x_1 =4) و $x_2 \ge 0$ (x_2 =10/3) محققة لهذا الحل.

سنوجد الآن مستوى القطع المختلط (٧,٢٩ أ) بدلالة المتغيرات الأصلية x_2 , x_1 . فمن علاقات المساواة في النموذج (٧,٢٨) نجد أن

$$s_1 = 6 - \{3x_2 - x_1\} \quad ، \quad s_2 = 35 - \{7x_1 + x_2\}$$

وبالتعويض في (٧,٢٩ أ) نجد مستوي القطع المختلط التالي:

$$11x_1 + 3x_2 \le 50$$

وقد أظهرنا هذا القطع على شكل خط منقط في الشكل رقم (٧,٣).

ملاحظة (٧,٢)

(أ) تجدر الإشارة هنا إلى إن عدم اشتراطنا على المتغيرات s_j أن تكون ذات قيم عددية صحيحة، كما ورد أعلاه في الخوارزمية (٧,٢,٢)، يساعد في التوصل إلى مستوي قطع مختلط أقوى من القطع ذلك المعرف بالعلاقة (٧,٢٩ب)، وهذا القطع هو

$$y_i = -f_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j s_j \qquad (٧,٣٠)$$

حيث

$\mu_j = a_{ij}$ إذا كان s_j عدد غير صحيح وكان $a_{ij} \ge 0$

$\mu_j = \frac{f_i}{f_i - 1} a_{ij}$ إذا كان s_j عدد غير صحيح وكان $a_{ij} < 0$

$\mu_j = f_{ij}$ إذا كان s_j عدد صحيح وكان $f_{ij} \le f_i$

$\mu_j = \frac{f_i}{f_i - 1}(1 - f_{ij})$ إذا كان s_j عدد صحيح وكان $f_{ij} > f_i$

(ب). قدمنا أعلاه نوعين مما أسميناه "مستوي القطع" أحدهما في الخوارزمية (٧,٢,١) والآخر في الخوارزمية (٧,٢,٢). ويوجد، في الحقيقة، أنواع أخرى من مستويات القطع كل له ميزاته وعيوبه الخاصة به. ولا يوجد نوع محدد من مستويات القطع يفوقها جميعاً ويمكن تطبيقه لكافة البرامج الخطية العددية، بل إننا قد نجد أحياناً

أن لمسألة برمجة خطية عددية خاصة مستوي قطع أنسب لحلها (ونعني به أسرع حسابيا) من مستوي قطع أخر.

(ج). كما نلاحظ فإن طرق مستويات القطع التي قدمناها في هذا الفصل لا تصلح إلا لحل مسائل البرمجة الخطية العددية (البحتة والمختلطة) أو تلك التي يمكن أن تؤول إلى هذا النوع من المسائل. ولذا فإنه ينظر إلى طرق مستويات القطع على أنها، وبشكل عام، غير فعالة لحل أي مسألة برمجة خطية عددية.

(٧,٣) تمارين (٧)

١- لدينا المسألة التالية:

كبر الدالة:

$$Z = 14x_1 + 18x_2$$

وفقا للقيود:

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \geq 0$$

$x_1 \;, \; x_2$ وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٢).

الجدول رقم (٧,١٢).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	56/11	30/11	126
x_1	1	0	-1/22	3/22	9/2
x_2	0	1	7/22	1/22	7/2

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع.

٢- لدينا المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 6x_1 + 8x_2$$

وفقا للقيود :

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \geq 0$$

x_2 , x_1 وأعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٣).

الجدول رقم (٧,١٣).

المتغيرات	x_1	x_2	s_1	s_2	الحل
Z	0	0	-4/5	-18/5	88/5
x_1	1	0	-2/5	1/5	4/5
x_2	0	1	1/5	-3/5	8/5

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع.

٣- لديك المسألة التالية :

صغر الدالة :

$$Z = 3x_1 + x_2$$

وفقا للقيود :

$$2x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 \quad , \; x_2 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

المطلوب

(أ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة مستوي القطع المختلطة.

(ب) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

(ت) قارن بين نتائجك في (أ) و(ب).

٤- لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$$

وفقا للقيود:

$$4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + 6x_2 \leq 5$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \ , x_3 \geq 0$$

x_1 عدد صحيح

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٤).

الجدول رقم (٧,١٤).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	2	2	2	30
x_1	1	0	0	3/10	1/5	0	5/2
x_2	0	1	0	1/20	1/5	0	5/4
x_3	0	1	1	1/4	0	1	25/4

المطلوب إيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة بطريقة مستوي القطع المختلطة.

٥- تمتلك شركة أربع فروع في أربع مدن لإنتاج نوع من مكيفات الهواء تقوم بتوزيعها على أربع من المناطق الرئيسة في القطر. ولكل من عمليات الإنتاج في كل من الفروع الأربعة تكلفتها الخاصة (تكلفة ثابتة)، كما أن تكلفة إنتاج كل مكيف هواء والتي تتضمن تكلفة شحنه يعتمد على المدينة التي ينتج فيها والمنطقة التي يتم شحنه إليها. جميع بيانات التكاليف ($) موضحة في الجدول رقم (٧,١٥). ثمة بيانات أخرى

هي أن كل من الفروع الأربعة يمكنها أن تنتج لغاية 1500 مكيف هواء بالسنة و50000 على الأقل من طلب المنطقة 3 يجب أن يأتي من المدينة 1 أو من المدينة 2. ترغب الشركة بجعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن، والمطلوب

(أ) صياغة المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.

(ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة بطريقة مستوي القطع.

(د) إيجاد جميع القطوع المستوية بدلالة المتغيرات الأصلية للمسألة.

(هـ) إيجاد الحل الأمثل بطريقة التفرع والحد.

(و) مقارنة النتائج التي توصلت إليها في (ج) و(د).

الجدول رقم (٧,١٥).

المدن	المناطق				التكلفة الثابتة
	المنطقة 1	المنطقة 2	المنطقة 3	المنطقة 4	مليون $
1	290	270	262	215	6.2
3	206	225	230	290	6
2	230	221	208	260	5.8
4	225	206	221	270	5.5
الطلب	100000	150000	110000	90000	

٦- معمل فيه خمس مكائن تقوم بإنجاز خمس أعمال. يعتمد وقت إنجاز عمل ما على الماكينة التي ستنجزه، كما أن لكل ماكينة وقت لتجهيزها للإنتاج. جميع بيانات الأزمنة بالدقائق معطاة في الجدول رقم (٧,١٦). (وجود الفراغ في الجدول مقابل ماكينة وعمل يعني أن الماكينة لا يمكن أن تنجز العمل المقابل). ترغب إدارة المعمل بعمل جدولة تنفيذ للأعمال الخمسة على المكائن الخمسة بحيث يكون زمن التنفيذ الكلي أقل ما يمكن،

الجدول رقم (٧,١٦).

المكائن	رقم العمل					زمن التجهيز
	1	2	3	4	5	
ماكينة١	42	70	93			30
ماكينة٢		85	45			40
ماكينة٣	58			37		50
ماكينة٤	58		55		38	60
ماكينة٥		60		54		20

والمطلوب.

(أ) صياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية عددية.

(ب) إيجاد الحل الأمثل للمسألة المخففة.

(ج) إيجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بأكثر من طريقة.

(د) بيان أي الطرق التي استخدمتها في(ج) هي الأسهل في الوصول إلى الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

٧– لديك المسألة التالية :

كبر الدالة :

$$Z = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3$$

وفقا للقيود :

$$x_1 + 5x_3 \le 10$$

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 1$$

$$6x_1 - 5x_2 \leq 0$$

$$x_1 , x_2 \ , \ x_3 \geq 0$$

$x_1 , x_2 \ , \ x_3$ أعداد صحيحة

حيث يعطى الحل الأمثل للمسألة المخففة بالجدول رقم (٧,١٧).

الجدول رقم (٧,١٧).

المتغيرات	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	الحل
Z	0	0	0	17/12	1/12	5/12	57/4
x_3	0	0	1	11/60	-1/12	-1/60	7/4
x_2	0	1	0	1/10	1/2	-1/10	3/2
x_1	1	0	0	1/12	5/12	1/12	5/4

المطلوب إيجاد ما يلي :

(أ) الحل الأمثل للمسألة بطريقة يعني مستوي القطع البحتة.

(ب) إذا كان x_1 هو المتغير الوحيد الذي يأخذ قيماً صحيحة فما هو الحل الأمثل للمسألة عندئذ؟.

٨- أعد حل المثال (٤,١٠) باستخدام طريقة مستوي القطع.

٩- أعد حل المثال (٢,١) من الفصل الثاني باستخدام مستوي القطع.

١٠- أعد حل المثال (٢,٢) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي البحتة.

١١- أعد حل المثال (٢,٦) من الفصل الثاني باستخدام طريقة القطع المستوي.

١٢- أعد حل المثال (٥,٢) من الفصل الخامس باستخدام طريقة مستوي القطع. قارن طريقة مستوي القطع التي استخدمتها وطريقة التفرع والحد التي سبق لنا استخدامها في حل المثال (٥,٢) من حيث حجم الحسابات.

المراجع

أولاً: المراجع العربية

[١] البلخي، زيد تميم. *مقدمة في بحوث العمليات* – الطبعة الثانية. النشر العلمي والمطابع، الرياض: جامعة الملك سعود ٢٠٠٧م.

[٢] الألوسي، عبد الستار أحمد. *أساليب بحوث العمليات: الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار*، دار القلم للنشر والتوزيع، دبي ٢٠٠٣م.

ثانياً: المراجع الأجنبية

أ) الكتب

[3] Duan, L. and Xiaoling, S. *Nonlinear Integer Programming*, Springer , Berlin , 2006.

[4] Garfinkel, R.S. and Nemhauser, G.L., *Integer Programming*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1972.

[5] Greenberg, H., *Integer Programming*. New York, NY: Academic Press, 1971.

[6] Harmmer,P.L., Johnson,E.L., Kort,B.H. , And Nemhauser,G.l. (Editors) . *Studies In Integer Programming* .Amsterdam , North –Holland Publishing Company , 1977.

[7] Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. *Introduction to Operations Research* . Holden-Day ,1980.

[8] John K. Karlof . *Integer Programming: Theory and Practice* ,Taylor & Francis Group, LLc ,2006

[9] Jünger M., and *Thomas M. Liebling 50 Years of Integer Programming 1958-2008:Springer Verlag* Berlin ,2010

[10] Kaufmann , A. Labordere,A.H. *Integer and Mixed Programming , Theory and Applications* . Academic Press, New York , 1977.
[11] Lawler, L. ET AL., *The Traveling Salesman Problem*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1985.
[12] Lawrence, J.R. , and Pasternack , B.A. *Applied Management Science* , John Wiley & Sons, New York 1998.
[13] Li D. and Sun X. *Nonlinear Integer Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) 2006.
[14] Luenberger D.G., and Ye Y. . ,*Linear and Nonlinear Programming* (International Series in Operations Research & Management Science) Springer,2008
[15] Nauss,R.M. Parametric Integer Programming . University of Missouri Press , Columbia & London , 1979 .
[16] Nesa,W. and Coppins,*R. Linear Programming and Extensions*. MCgraw-Hill Book Company , New York , 1981.
[17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A., *Integer and Combinatorial Optimization*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1999.
[18] Parker, R. and Rardin, R., *Discrete Optimization*. Orlando, Fla.: Academic Press, 1988.
[19]Plane, D. and McMillan, C.,. *Discrete Optimization: Integer Programming and Network Analysis for Management Decision*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
[20] Pochet , Y. , and Wolsey, L.A. *Production Planning by Mixed Integer Programming* . Springer , New York ,2006
[21] Salkin, H.M., *Integer Programming. Reading, Mass.: Addison-Wesley*, 1975.
[22] Salkin, H.M. and Mathur, K., *Foundations of Integer Programming*. New York, NY: North-Holland, 1989.
[23]Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming . John Willey A sons* , Amesterdam ,2000.
[24] Taha, H.A., *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*. New York, NY: Academic Press, 1975.
[25] Taha, H.A., Operations Research , *An Introduction* . Macmillan Publishing Company, New York, 1987.
[26]Williams H.P P.*Model Building in Mathematical Programming*, ,John Willey A sons ,New York ,1999.
[27] Winston,W.L. Operations Research , *Applications and Algorithms* . Duxbury Prcss , Bclmont , California, 1994.
[28] Wolsey, L.A *Integer Programming ,John Willey A sons* ,New York, 1998.

ب) مجلات العلمية

[29] *European Journal of Operational Research*
[30] *Journal of the Operational Research Society*

ج) مواقع إلكترونية

[31] http://tomopt.com/tomlab/optimization/mip.php
[32] http://www.insightful.com/products/nuopt/SNUOPT_technical_note_MIP.pdf
[33] http://mat.gsia.cmu.edu/orclass/integer/integer.html.

الملحق

نبذة عن المصفوفات والمحددات والمجموعات المحدبة

أولاً: المصفوفات

Matrices

لنفرض أن a_{ij} ($i=1,2,\ldots,m$ ، $j=1,2,\ldots,n$) هي أعداد حقيقية فإذا وضعنا هذه الأعداد بترتيب معين كما في الشكل التالي G :

$$G=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن G يسمى مصفوفة من الدرجة **m×n** (عدد أسطرها m وعدد أعمدتها n).

وعادة ما نختصر كتابة G على الشكل $G=[a_{ij}]$ ونسمي الأعداد a_{ij} عناصر المصفوفة. وفي الحالة الخاصة n=m فإننا نسميها مصفوفة مربعة من الدرجة n .وعندما m=1 فإنها تسمى مصفوفة سطر أما عندما n=1 فتسمى مصفوفة عمود. كذلك نسمي العناصر a_{ij} التي يكون فيها i=j بقطر المصفوفة، ونسمي المصفوفة المربعة التي تكون جميع عناصر القطر فيها مساوية 1 وبقية عناصرها أصفارا باسم "مصفوفة الوحدة كما

نسمي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفارا باسم المصفوفة الصفرية.فمثلا المصفوفات G_1 ، G_2 ، G_3 G_4 التالية هي مصفوفة 4×5 ومصفوفة عمود 1× 4 ومصفوفة وحدة 3×3 ومصفوفة سطر 4×1 على الترتيب.

$$G_4 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 2 \end{bmatrix} ، G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ، G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} ، G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 7 & 9 \\ 4 & 6 & 2 & 10 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

العمليات الأساسية على المصفوفات

إذا كان لدينا مصفوفتان $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ من درجة واحدة فإن مجموعهما(فرقهما) هو المصفوفة C التي عناصرها c_{ij} معرفة بالعلاقة التالية :

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

(+ للمجموع و− للفرق). ويعرف حاصل ضرب مصفوفة ما $A=[a_{ij}]$ بعدد r والذي نرمز له بالرمز rA بأنه المصفوفة الناتجة من ضرب كل عنصر من A بالعدد r أي $rA=[ra_{ij}]$. ومن الواضح أن A+B=B+A أي أن جمع المصفوفات تبديلي.

ولتعريف حاصل ضرب مصفوفتين $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ نشترط أن A من الدرجة m×n وأن B من الدرجة n×p عندئذ حاصل ضربهما والذي نرمز له بالرمز AB هو المصفوفة التي عناصرها m_{ij} معطاة بالعلاقة التالية :

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

وبوجه عام فإن AB≠BA . أي أن ضرب المصفوفات ليس تبديلياً .

فمثلا لو أخذنا المصفوفات G_2 وG_4 أعلاه فإن G_2G_4 هي مصفوفة 1×1 تحسب كما يلي 2×4 +7×8 +11×7 +8×2 = 157 . كذلك يمكننا التحقق أنه لو كانت I هي مصفوفة الوحدة من الدرجة n وكانت A مصفوفة من الدرجة m×n فإن AI=A .ولو كانت A مربعة ومن الدرجة n لكان AI=IA=A. وكمثال على جمع المصفوفات نأخذ المصفوفة G_1 أعلاه والمصفوفة التالية :

$$G_5 = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 2 & 10 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

عندئذ

$$G_1+G_5=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 10 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 15 & 12 & 18 \\ 8 & 14 & 4 & 20 \\ 4 & 22 & 2 & 9 \end{bmatrix} .$$

ثانياً: المحددات

Determinants

إن مفهوم المحددات وقيمتها من أهم الأمور المتعلقة بالمصفوفات لكننا لا نعرف المحددات إلا للمصفوفات المربعة. فإذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن محدد A (determinant) والذي سنرمز له ب det(A) يعطى كما يلي :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ويقال عن محدد A إنه من المرتبة n . وللمحددات قيمتها الخاصة بها وتتم حساب هذه القيمة استنادا إلى المحددات ذات المرتبة الثانية حيث تحسب قيمها كما يلي :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وتتم حساب المحددات من مراتب أعلى من 2 إما حسب أحد أسطرها(أو حسب أحد أعمدتها) وذلك بإعطاء عناصر ذلك السطر(العمود) إشارات مختلفة ومتعاقبة ابتداء من الإشارة + وضرب النواتج بالمحددات المقابلة الناتجة . ويقصد بالمحدد المقابل لعنصر بأنه ذلك المحدد الجزئي الناتج من حذف السطر والعمود اللذان يتقاطعان في ذلك العنصر من المحدد الذي نرغب بحسابه. وللتوضيح فإن

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 2(6-63) - 8(5-56) + 4(54-48) = 27$$

ويتم حساب المحددات من مراتب أعلى بنفس الطريقة. ومن الواضح أنه إذا كانت جميع عناصر سطر (أو عمود) في محدد ما أصفارا فإن قيمة هذا المحدد تساوي الصفر فإذا كان مثل هذا السطر أو العمود غير موجود في محدد فيمكننا تسهيل حساب قيمته من خلال اختيار السطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار . فمثلا من المحدد التالي نلاحظ أن السطر الثاني هو الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار الأمر الذي يسهل علينا حساب قيمته عن طريق هذا السطر حيث نجد

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 3[2(7) - 1(-25)] - 1[-7(-28) + 2(-2)] = -75$$

ثالثاً: تعريف المجموعات المحدبة

Convex sets

نقول عن مجموعة S جزئية غير خالية من الفضاء $\Re^n$ إنها مجموعة محدبة (Convex Set) إذا كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين X , Y منها تقع بكاملها داخل هذه المجموعة.

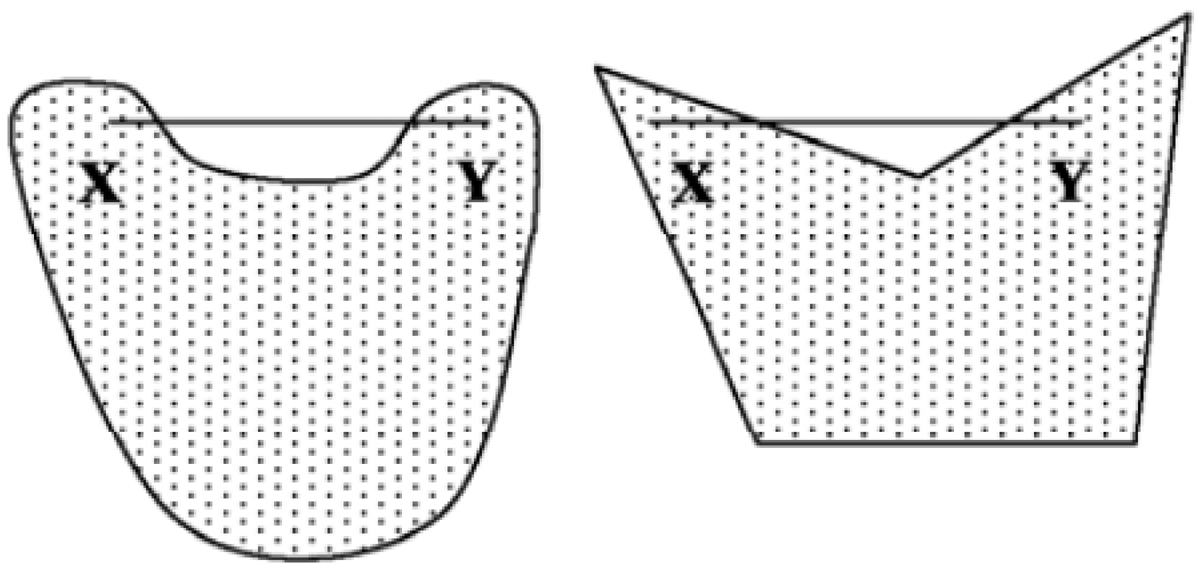
ويعطي الشكل رقم (١ ،أ) أمثلة على مجموعات غير محدبة في حين يمثل الشكل رقم (٢ ،أ) أمثلة على مجموعات محدبة.

وتعرف المجموعة المحدبة رياضياً كما يلي. نقول عن مجموعة غير خالية S إنها محدبة إذا تحقق الشرط التالي لأي عنصرين X,Y من S ولأي $0 \le \lambda \le 1$ فإن $S \ni \lambda X + (1-\lambda)Y$ ويمكننا، باستخدام العلاقة الأخيرة، إثبات النظرية التالية بسهولة

نظرية (١,م)

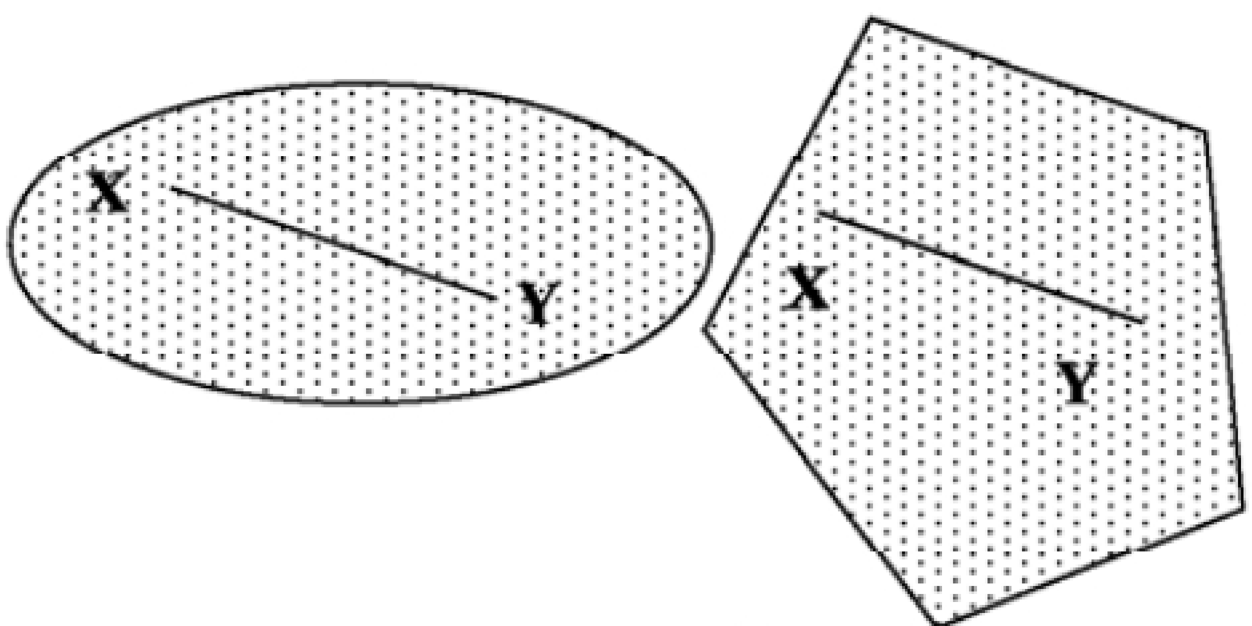
تقاطع أي عدد منته من المجموعات المحدبة (إذا لم يكن خالياً) هو أيضاً مجموعة محدبة.

كما يمكننا إثبات أن حل أي متباينة خطية هو مجموعة محدبة. وبموجب النظرية الأخيرة يكون فضاء الحل لأي برنامج خطي هو مجموعة محدبة، لأن هذا الفضاء ليس إلا تقاطع مجموعات هي حلول لمتباينات خطية.



(ب) مجموعات غير محدبة

الشكل رقم (١، أ).



(أ) مجموعات محدبة

الشكل رقم (٢،أ).

ثبت المصطلحات

أولاً: عربي– إنجليزي

أ

إجراء	Procedure
احتمال	Probability
احتمالي	Probabilistic
إحصاء	Statistics
أداء	Performance
أدنى	Low
الأدنى	Lower
أساسي	Basic
إستراتيجية (إستراتيجيات)	Strategy (Strategies)
الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى	Optimal Strategy (Strategies)
أعلى	Upper

اقتصادي	Economic
أقصر مسار	Shortest path
أمثل	Optimal
أمثلية	Optimization
أمثلية جزئية	Sub-optimization
إمكانية (مكان للخدمة)	Facility
إنتاج	Production
انتظار	Waiting
أولي	Elementary

ب

بارز	Prominent
بحوث عمليات	Operation research
بديل (بدائل)	Alternative(s)
برمجة	Programming
برمجة خطية	Linear programming
برمجة خطية عددية	Integer Linear Programming
برمجة رياضية	Mathematical programming
برمجة عددية	Integer programming
برمجة عددية ذات متغيرات ثنائية القيم	(0-1) Integer Programming
برمجة عددية مختلطة	Mixed integer Programming
بناء	Model building

بيانات	Data

ت

تباين	Variance
تجزئة	Partition
تحليل الحساسية	Sensitivity analysis
تحليل بيانات	Data analysis
تخصيص	Assignment
تدرج أو مقياس	Scale
تدفق شبكي	Network flow
تصميم	Design
تصميم نظام	System design
تصنيف المشكلة	Problem classification
تعاوني	Cooperative
تفسير اقتصادي	Economic interpretation
تكاليف مباشرة	Direct costs
تلف	Deterioration
تنبؤ	Forecasting
تنفيذ	Implementation
توزيع	Distribution
توزيع طبيعي	Normal distribution
توزيع منتظم	Uniform distribution

ج

جدول	Table

ح

حاسب	Computer
حالة استقرار	Steady-state
حجم	Size
حد أدنى	Lower bound
حد أعلى	Upper bound
حرج	Critical
حساسية	Sensitivity
حظ	Chance
حل (حلول)	Solution
حل ابتدائي	Initial solution
حل أساسي	Basic solution
حل النموذج	Model solution
حل أمثل	Optimal solution
حل أمثل جزئي	Suboptimal solution
حل أمثل مضاعف	Multiple optimal solution
حل أمثل وحيد	Unique optimal solution

Non-optimal solution	حل غير أمثل
Infeasible solution	حل غير ممكن
Feasible solution	حل ممكن

خ

Property	خاصية
Pure	خالص أو بحت أو صرف
Service	خدمة
Discount	خصم
Quantity discount	الخصم على الكمية
Linear	خطي
Algorithm	خوارزمية
Iterative algorithm	خوارزمية تكرارية

د

Function	دالة
Objective function	دالة الهدف
Convex function	دالة محدبة
Concave function	دالة مقعرة
Degree	درجة
Cycle	دورة
Periodic	دورية
Dynamic	ديناميكيا (حركي)

ذ

ذكاء صناعي	Artificial intelligence

ر

ربح	Profit
رسم	Graph
رمز (رموز)	Symbol

ز

زمن أو وقت	Time

س

ساكن	Static
سطر محوري	Pivot row
السمبلكس	Simplex

ش

شبكة	Network
شجرة	Tree
شخصي	Personal

شرط (شروط)	Condition

ص

صف (صفوف)	Row(s)
صفة أو ميزة	Characteristic
صلاحية	Validation
صياغة	Formulation
صياغة المشكلة	Problem formulation
صيغة	Form

ض

ضمني	Implicit

ط

طبيعة (قدر)	Nature
طريقة	Method
طريقة التعداد الشامل	Total enumeration method
طريقة التعداد الضمني	Implicit enumeration method
طريقة السمبلكس	Simplex Method
طريقة السمبلكس الثنوية	Dual Simplex Method
طريقة بيانية	Graphical method

ع

عائد (عوائد)	Payoff(s)
عامل الخصم	Discount factor
عجز	Shortage
عدد صحيح	Integer
عددي	Digital
عشوائي	Random
عشوائي	Stochastic
عقدة	Node
عقدة حظ	Chance Node
عملية	Process
عمود محوري	Pivot column
عنصر	Element
عنصر محوري	Pivot element

غ

غير منته	Infinite

ف

فضاء	Space
فضاء الحل	Solution space

Effectiveness	فعالية
System effectiveness	فعالية نظام

ق

Controllable	قابل للضبط
Cut	قطع
Cutting plane	قطع مستوي
Pure cutting plane	قطع مستوي صرف
Mixed cutting plane	قطع مستوي مختلط
Constraint(s)	قيد (قيود)
Upper Value	القيمة العليا
Expected Value	قيمة متوقعة

ك

Complete	كامل
Perfect	كامل
Total	كلي
Quantity	كمية

ل

Game(s)	لعبة (ألعاب)

م

مباشر	Direct
مبدأ	Principle
متصل	Continuous
متطابق	Identical
متغير	Variable
متغير أساسي	Basic Variable
متغير قابل للضبط	Controllable variable
متغير قرار	Decision variable
متناظر	Symmetric
متوسط	Mean
متوقع	Expected
مجموعة محدبة	Convex set
محاكاة	Simulation
محدد	Deterministic
مختلط	Mixed
مخزون	Stock
مخطط	Diagram
مدخلات	Inputs
مرتبط	Dependent
مرحلة (مراحل)	Stage(s)
مسار	Path

مسألة أولية	Primal problem
مسألة ثنوية	Dual problem
مستقر	Stationary
مستقل	Independent
مستوى	Level
مشترك	Joint
مشروع	Project
مصفوفة	Matrix
مصفوفة العوائد	Payoff matrix
مطلق أو حاد أو كامل	Strict
معدل	Rate
معلمة	Parameter
معلومات	Information
معلومات غير كاملة	Imperfect Information
معلومات كاملة	Perfect Information
معيار	Criterion
مقبول	Admissible
مقياس الأداء	Performance measure
ملائم	Appropriate
ممكن	Feasible
منافسة	Competition
منتظم	Uniform
منته	Finite

منفصل	Discrete
منفعة	Utility
منقول مصفوفة	Transpose of a Matrix
موقع الخدمة	Facility Location
ميل	Slope

ن

نشاط	Activity
نضوب	Depletion
نظام	System
نظرية	Theorem
نقطة	Point
نقطة سرجية (أو نقطة توازن)	Saddle Point
نماذج البرمجة العددية	Models of integer programming
نمذجة	Modelling
نموذج	Model
نموذج أمثل	Optimal model
نموذج ثنوي	Dual Model
نموذج رياضي	Mathematical model

هـ

هدف	Objective

هيكل	Structure
هيكل النظام	System structure

و

وحيد	Unique
وزن	Weight

ي

يهيمن	Dominate

ثانياً: إنجليزي – عربي

A

Activity	نشاط
Admissible	مقبول
Algorithm	خوارزمية
Alternative(s)	بديل (بدائل)
Appropriate	ملائم
Artificial intelligence	ذكاء صناعي
Assignment	تخصيص

B

Basic	أساسي
Basic solution	حل أساسي
Basic Variable	متغير أساسي

C

Chance	حظ
Chance Node	عقدة حظ
Characteristic	صفة أو ميزة

Competition	منافسة
Complete	كامل
Computer	حاسب
Concave function	دالة مقعرة
Condition	شرط (شروط)
Constraint(s)	قيد (قيود)
Continuous	متصل
Controllable	قابل للضبط
Controllable variable	متغير قابل للضبط
Convex function	دالة محدبة
Convex set	مجموعة محدبة
Cooperative	تعاوني
Criterion	معيار
Critical	حرج
Cut	قطع
Cutting plane	قطع مستوي
Cycle	دورة

D

Data	بيانات
Data analysis	تحليل بيانات
Decision variable	متغير قرار

Degree	درجة
Dependent	مرتبط
Depletion	نضوب
Design	تصميم
Deterioration	تلف
Deterministic	محدد
Diagram	مخطط
Digital	عددي
Direct	مباشر
Direct costs	تكاليف مباشرة
Discount	خصم
Discount factor	عامل الخصم
Discrete	منفصل
Distribution	توزيع
Dominate	يهيمن
Dual problem	مسألة ثنوية
Dual Model	نموذج ثنوي
Dual Simplex Method	طريقة السمبلكس الثنوية
Dynamic	ديناميكيا (حركي)

E

Economic	اقتصادي

Economic interpretation	تفسير اقتصادي
Effectiveness	فعالية
Element	عنصر
Elementary	أولي
Expected	متوقع
Expected Value	قيمة متوقعة

F

Facility	إمكانية (مكان للخدمة)
Facility Location	موقع الخدمة
Feasible	ممكن
Feasible solution	حل ممكن
Finite	منته
Forecasting	تنبؤ
Form	صيغة
Formulation	صياغة
Function	دالة

G

Game(s)	لعبة(ألعاب)
Graph	رسم

طريقة بيانية	Graphical method

I

برمجة خطية عددية	Integer Linear Programming
برمجة عددية	Integer programming
برمجة عددية ثنائية ذات متغيرات ثنائية القيم	Integer Programming
تنفيذ	Implementation
حل ابتدائي	Initial solution
حل غير ممكن	Infeasible solution
خوارزمية تكرارية	Iterative algorithm
ضمني	Implicit
طريقة التعداد الضمني	Implicit enumeration method
عدد صحيح	Integer
غيرمنته	Infinite
متطابق	Identical
مدخلات	Inputs
مستقل	Independent
معلومات	Information

J

مشترك	Joint

L

Level	مستوى
Linear	خطي
Linear programming	برمجة خطية
Low	أدنى
Lower	الأدنى
Lower bound	حد أدنى

M

Mathematical model	نموذج رياضي
Mathematical programming	برمجة رياضية
Matrix	مصفوفة
Mean	متوسط
Method	طريقة
Mixed	مختلط
Mixed integer Programming	برمجة عددية مختلطة
Mixed cutting plane	قطع مستوي مختلط
Model	نموذج
Models of integer programming	نماذج البرمجة العددية
Model building	بناء
Model solution	حل النموذج

Modelling	نمذجة
Multiple optimal solution	حل أمثل مضاعف

N

Nature	طبيعة(قدر)
Network	شبكة
Network flow	تدفق شبكي
Node	عقدة
Non-optimal solution	حل غير أمثل
Normal distribution	توزيع طبيعي

O

Objective	هدف
Objective function	دالة الهدف
Operation research	بحوث عمليات
Optimal	أمثل
Optimal model	نموذج أمثل
Optimal solution	حل أمثل
Optimal Strategy (Strategies)	الإستراتيجية (الإستراتيجيات) المثلى
Optimization	أمثلية

p

Parameter	معلمة
Partition	تجزئة
Payoff(s)	عائد (عوائد)
Path	مسار
Payoff matrix	مصفوفة العوائد
Perfect	كامل
Perfect Information	معلومات كاملة
Imperfect Information	معلومات غير كاملة
Performance	أداء
Performance measure	مقياس الأداء
Periodic	دورية
Personal	شخصي
Pivot row	سطر محوري
Pivot column	عمود محوري
Pivot element	عنصر محوري
Point	نقطة
Primal problem	مسألة أولية
Principle	مبدأ
Probabilistic	احتمالي

احتمال	Probability
تصنيف المشكلة	Problem classification
صياغة المشكلة	Problem formulation
إجراء	Procedure
عملية	Process
إنتاج	Production
ربح	Profit
برمجة	Programming
مشروع	Project
بارز	Prominent
خاصية	Property
خالص أو بحت أو صرف	Pure
قطع مستوي صرف	Pure cutting plane

Q

كمية	Quantity
الخصم على الكمية	Quantity discount

R

عشوائي	Random
معدل	Rate
صف (صفوف)	Row(s)

S

Saddle Point	نقطة سرجية (أو نقطة توازن)
Scale	تدرج أو مقياس
Sensitivity	حساسية
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Service	خدمة
Shortage	عجز
Shortest path	أقصر مسار
Simplex	السمبلكس
Simplex Method	طريقة السمبلكس
Simulation	محاكاة
Size	حجم
Slope	ميل
Solution	حل (حلول)
Solution space	فضاء الحل
Space	فضاء
Stage(s)	مرحلة (مراحل)
Static	ساكن
Stationary	مستقر
Statistics	إحصاء
Steady-state	حالة استقرار

Stochastic	عشوائي
Stock	مخزون
Strict	مطلق أو حاد أو كامل
Structure	هيكل
Strategy (Strategies)	إستراتيجية (إستراتيجيات)
Suboptimal solution	حل أمثل جزئي
Sub-optimization	أمثلية جزئية
Symbol	رمز (رموز)
Symmetric	متناظر
System	نظام
System design	تصميم نظام
System effectiveness	فعالية نظام
System structure	هيكل النظام

T

Table	جدول
Theorem	نظرية
Time	زمن أو وقت
Total	كلي
Total enumeration method	طريقة التعداد الشامل
Transpose of a Matrix	منقول مصفوفة
Tree	شجرة

U

Uniform	منتظم
Uniform distribution	توزيع منتظم
Unique	وحيد
Unique optimal solution	حل أمثل وحيد
Upper	أعلى
Upper bound	حد أعلى
Upper Value	القيمة العليا
Utility	منفعة

V

Validation	صلاحية
Variable	متغير
Variance	تباين

W

Waiting	انتظار
Weight	وزن

كشاف الموضوعات